

ファインマン講義 量子電磁力学 (3)

Feynman Lectures on Quantum Electrodynamics (3)

訳および解説 並 木 雅 俊

Masatoshi Namiki

複数の電子の相互作用

ディラック方程式が1粒子の運動だけを記述しているとしても、量子電磁力学の原理から、2粒子以上の相互作用の振幅を求めることができる（ただし、核力が関与しないとする）。

まず、ポテンシャルが存在する領域を移動する2つの電子を考え、2つの電子間の相互作用がないと仮定する（図 24-2 参照）。電子 a が $1 \rightarrow 3$ へ、電子 b が $2 \rightarrow 4$ へ移動するときの振幅を記号 $K(3, 4; 1, 2)$ で表すとする。電子間相互作用がないと仮定すれば、 K は積分核の積 $K_+^{(a)}(3, 1)K_+^{(b)}(4, 2)$ として書くことができる。ここで、上付き文字は $K_+^{(a)}$ が粒子 a を記述する変数にのみ作用することを意味し、 $K_+^{(b)}$ も同様である。

第2の型の相互作用は、パウリ原理に従ってどのように測定しても、最初のものとは区別がつかない結果をもたらす。これは、位置3と4の間で粒子が交換されることで、最初のケースと異なっている（図 24-3 参照）。さて、パウリ原理では、複数の電子からなる系の波動関数は、2つの粒子の空間変数が入れ替わると、波動関数の符号が変わるように定めなくてはならない。したがって、この振幅は（両方の可能性を含めて） $K = K_+^{(a)}(3, 1)K_+^{(b)}(4, 2)$ となる。

同じような状況は、次のような生成過程でも起こる。はじめに、1つの電子がポテンシャル領域に移動する。このポテンシャルによって対生成が起こる。結果として、この領域から1つの陽電子と2つの電子が出てくる。この事象に

The figure consists of two diagrams, (a) and (b), each showing a shaded elliptical region labeled 'potential region' with an arrow. In both diagrams, four points are marked: 1 (top left), 2 (bottom), 3 (top right), and 4 (further right). In diagram (a), the shaded region is a single connected area that encompasses points 1, 2, and 3, and extends towards point 4. In diagram (b), the shaded region is split into two disconnected parts by a vertical line segment that passes through point 2. The left part of the shaded region contains points 1 and 3, while the right part contains point 4.

今回の事象が起こる確率、前回の事象が起こる確率、その他類似の事象が起こる確率は、振幅の絶対値の 2 乗に数 P_v を掛けることで得られる。 P_v は、実は、真空が真空のままである確率のことである。これゆえ、対生成の可能性があるので、その確率は 1 ではない。 P_v は、表 24-1 に示すように、何も無い状態から始まり、様々な数の対の終状態の確率をこの表で計算することができる。

対の最終的な数	確率
0	$P_v 1^2$
1	$P_v K_+(2,1) ^2$
2	$P_v K_+(3,1)K_+(4,2) - K_+(4,1)K_+(3,2) ^2$
3	他
他	

これらの確率の和は 1 でなければならないので、この式から P_ν が決定される。 P_ν の大きさは、その場に存在するポテンシャルに依存する。したがって、単に振幅の 2 乗とした「確率」(つまり、 P_ν 項を除いた)は、実際には、あるポテンシャルでさまざまな事象が生じる相対確率を示す。

$\delta_+(s^2)$ を使用する。まず、1つの事象に複数の可能性があること (パウリ原理) は無視することにする。全振幅は、適切な空間変数を入れ替え、対応する符号を変更し、そうして得られたすべての振幅を合計することによって、常に 1 つの振幅から導き出すことができる。

相互作用に対する確率振幅は、非相対論的ボルン近似により、

$$K(3,4; 1,2) = K^{(0)} + K^{(1)}$$

と書ける。ここで、以前の講義から、

$$K^{(0)} = K_0^{(a)}(3,1)K_0^{(b)}(4,2)$$

と

$$K^{(1)} = -i \int K^{(0)}(3,4; 5,6) V(5,6) K^{(0)}(5,6; 1,2) d^3x_5 d^3x_6 dt_5$$

が求められる。非相対論的な相互作用は双方の粒子に同時に作用するため、 $t_5 = t_6$ となることに注意すること。相互作用ポテンシャルはクーロンポテンシャル

$$V(5,6) = \frac{e^2}{r_{5,6}}$$

である。

因子として関数 $\delta(t_5 - t_6)$ が含まれている場合、 t_5 と t_6 を変数分離して扱える。これより、

$$K^{(1)} = -i \int \int K_0(3,5) K_0(4,6) \frac{e^2}{r_{5,6}} \delta(t_5 - t_6) K_0(5,1) K_0(6,2) d\mathbf{r}_5 d\mathbf{r}_6$$

となる。ここで、微分 $d\tau$ は時間と空間の両方の変数を含む。 K_0 を K_+ に置き換え、 $\delta(t_5 - t_6)$ を $\delta(t_5 - t_6 - r_{5,6})$ に置き換え、遅延ポテンシャルの考えを導入すれば、相対論的カーネルを得ることができると考えられる。しかし、この δ 関数をそのまま使うことは正しくない。フーリエ変換には正の振動数と負の振動数が含まれるが、光子は正のエネルギーしか持たないからである。 δ 関数は、

$$\delta(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega X) d\omega$$

である。これを適切に使用するために、正のエネルギーだけの関数

$$\delta_+(X) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-i\omega X) d\omega$$

を定義する。この関数の値は積分で求められる。したがって、

$$\begin{aligned} \delta_+(X) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi i} \frac{1}{X - i\varepsilon} \\ &= \delta(X) + \frac{1}{\pi i} \left(\frac{1}{X} \text{の主値} \right) \end{aligned}$$

$t_5 - t_6 \equiv t$ および $r_{5,6} = r$ として省略し、 $t_5 \leq t_6$ と $t_5 \geq t_6$ のどちらもが可能でなくてはならないことを考慮すると、遅延ポテンシャルは

$$V(5,6) = \frac{e^2}{2r} \{ \delta_+(t-r) + \delta_+(-t-r) \}$$

となる。

練習問題：(1) 次の式を示しなさい。

$$\frac{1}{2r} \{ \delta_+(t-r) + \delta_+(-t-r) \} = \delta_+(t^2 - r^2)$$

$(t^2 - r^2)$ を相対論的不変量である $s_{5,6}^2$ と定義することで、ポテンシャルは $e^2 \delta_+(s_{5,6}^2)$ となる。もう一つ含めなければならないのは磁気相互作用である。この項は $-V_a \cdot V_b$ に比例する。ディラック方程式の表記に従うと、この積は $-\alpha_a \cdot \alpha_b$ と記せる。これを等価形式 $-(\beta\alpha)_a \cdot (\beta\alpha)_b$ で表すと都合がよく、この表記では、遅延クーロンポテンシャルは $\beta_a \beta_b$ に比例する。これらの β は、相対論的積分核の使用に由来する。したがって、この相互作用を表す完全なポテンシャルは、

$$e^2 \delta_+(s_{5,6}^2) \{ \beta_a \beta_b - (\beta\alpha)_a \cdot (\beta\alpha)_b \} = e^2 \delta(s_{5,6}^2) \gamma_\mu^{(a)} \gamma_\mu^{(b)}$$

となる。この第1近似の核は

$$K^{(1)}(3,4; 1,2)$$

$$= -ie^2 \int \int K_+^{(a)}(3,5) K_+^{(b)}(4,6) \gamma_\mu^{(a)} \gamma_\mu^{(b)} \delta_+(s_{5,6}^2) K_+^{(a)}(5,1) K_+^{(b)}(6,2) d\tau_5 d\tau_6$$

$$= -ie^2 \int \int [K_+(3,5) \gamma_\mu K_+(5,1)]_a \delta_+(s_{5,6}^2) [K_+(4,6) \gamma_\mu K_+(6,2)]_b d\tau_5 d\tau_6 \quad (24-2)$$

となる。ここで、 γ_μ の下付き文字は、 K_+ の下付き文字と同様に、行列演算子がどの変数で動作するかを示している。

この核が表す事象は、図 24-5 のように図示することができる。これは、電子の間で仮想光子が交換されることを表している。仮想光子は t, x, y, z の 4 方向のいずれかに偏光することができる。これらの 4 つの可能性の和は、 $\gamma_\mu \gamma_\mu$ の反復添え字で示されている。この核で表示される積分 (24-2) は、光子が $5 \rightarrow 6$ (時間調整によつては $6 \rightarrow 5$) 伝播するための振幅が $\delta_+(s_{5,6}^2)$ であることを意味する。式 (24-2) は、量子電磁力学の基本法則のもう一つの記述とみなすことができる。

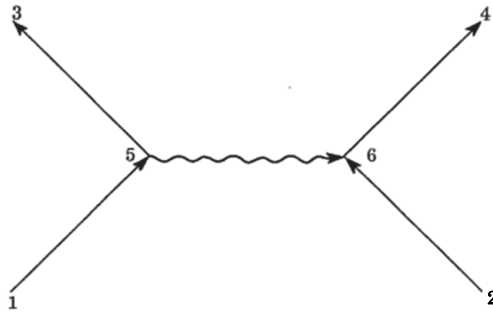


図 24-5

(2) 次の式を示しなさい。

$$\delta_+(s^2) = -4\pi \int \frac{\exp(-ik \cdot x)}{(2\pi)^4(k^2 + i\varepsilon)} d^4k$$

運動量空間では、

$$\delta_+(s^2) = -\frac{4\pi}{k^2}$$

である。

第 25 回講義

量子電磁力学の「規則」の導出

前回の講義の結果から、電気力学の法則は次のように述べることができる。

(1) 光子を放出（または吸収）する振幅は $e\gamma_\mu$ である。(2) 光子が 1 から 2 になる振幅は $\delta_+(s_{1,2}^2)$ である。運動量表現では、

$$\begin{aligned}\delta_+(s_{1,2}^2) &= -4\pi \int \frac{\exp\{-ik \cdot (x_2 - x_1)\}}{k^2 + i\varepsilon} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \quad (25-1) \\ &= -\frac{4\pi}{k^2 + i\varepsilon}\end{aligned}$$

となる。 $\delta_+(s_{1,2}^2)$ は、自由粒子の伝播核の導出に現れる量 $I_+(s_{1,2}^2)$ と同じで、粒子の質量 m を 0 としたとき、興味深いことになる。波動方程式 $\square^2 A_\mu = -4\pi J_\mu$ を運動量表現で

$$-k^2 a_\mu = 4\pi j_\mu$$

あるいは

$$a_\mu = -\frac{4\pi}{k^2} j_\mu \quad (25-2)$$

と記すと、マクスウェル方程式とより関係が直接的にわかる。

ここで、第 2 回講義で述べた量子電気力学の「規則」との関連性を考えてみる。その規則に従って、 a が光子を放出し、 b が吸収するときの振幅を計算してみる（図 25-1 参照）。電子 a が 1 から 5 へ進み、偏光 \vec{e} と \mathbf{K} 方向の光子を放出し、5 から 3 へ進む振幅は

$$\left[K_+(3,5) \vec{e} \sqrt{\frac{4\pi e^2}{2K}} \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_5) \exp(iKt_5) K_+(5,1) \right]_a$$

で与えられ、一方、 b が 2 から 6 へ進み、偏光 \vec{e} と \mathbf{K} 方向の光子を 6 で吸収し、6 から 4 へ進む振幅は、

$$\left[K_+(4,6) \vec{e} \sqrt{\frac{4\pi e^2}{2K}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_6) \exp(-iKt_6) K_+(6,2) \right]_b$$

で与えられる。この 2 つの過程が起こる振幅は、 $t_6 > t_5$ なら b が a の光子を吸収したのと同じで、各々の振幅の積に過ぎない。 a が b の光子を吸収した場合、前述の振幅のすべての指数の符号が変わり、 t_6 は t_5 より小さくならざるを得ない。

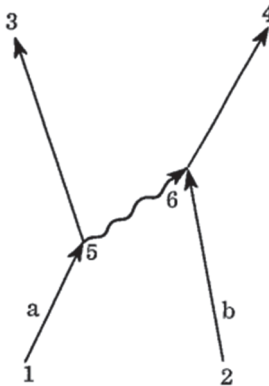


図 25-1

a と b の間で任意の光子が交換される振幅を得るには、前述の拘束のもと、光子の方向に関して積分し、可能な光子の偏光について和をとり、 t_5 と t_6 に関して積分する必要がある。偏光に対する和では、 \vec{e} を γ_μ に置き換えて、 μ の和をとる。これは、4 つの偏光方向の総和に相当するが、これに関しては後で説明する。このようにすることで、

$$(\text{光子 } a \rightarrow b \text{ の振幅}) = 4\pi e^2 \sum_{\mu} \int \exp\{-i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_6)\} \exp\{iK(t_5 - t_6)\}$$

$$\begin{aligned}
& \times [K_+(3,5)\gamma_\mu K_+(5,1)]_a [K_+(4,6)\gamma_\mu K_+(6,2)]_b \frac{1}{2K} \frac{d^3\mathbf{K}}{(2\pi)^3} dt_5 dt_6 \quad t_6 > t_5 \\
& = 4\pi e^2 \sum_\mu \int \exp\{i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_6)\} \exp\{-iK(t_5 - t_6)\} \\
& \times [K_+(3,5)\gamma_\mu K_+(5,1)]_a [K_+(4,6)\gamma_\mu K_+(6,2)]_b \frac{1}{2K} \frac{d^3\mathbf{K}}{(2\pi)^3} dt_5 dt_6 \quad t_6 < t_5 \quad (25-3)
\end{aligned}$$

が得られる。これを前回の講義の結果と比較すると、

$$\begin{aligned}
\delta_+(s_{5,6}^2) &= 4\pi \int \exp\{-i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_6)\} \exp\{iK(t_5 - t_6)\} \frac{1}{2K} \frac{d^3\mathbf{K}}{(2\pi)^3} \quad t_6 > t_5 \\
&= 4\pi \int \exp\{i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_6)\} \exp\{-iK(t_5 - t_6)\} \frac{1}{2K} \frac{d^3\mathbf{K}}{(2\pi)^3} \quad t_6 < t_5
\end{aligned}$$

となる。これは、フーリエ変換

$$\exp(-iK|t|) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2iK}{\omega^2 - K^2 + i\varepsilon} \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi}$$

を使って、前述の式が

$$\delta_+(s_{5,6}^2) = -4\pi \int \frac{\exp\{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_5 - \mathbf{x}_6)\}}{k_1^2 - \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} + i\varepsilon} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \quad (25-4)$$

となるように時空対称性を明らかにする形で書くことができ、これを第 24 回講義の最後の問題の結果と比較すると、第 2 回講義で与えられた規則が、前回の講義で開発した相対論的電気力学と整合していることがわかる。

電子と電子の散乱

次に、この理論を用いて電子-電子散乱断面積を求めてみる。入口と出口だけでは区別のつかない 2 つの過程を図 25-2 に示す。

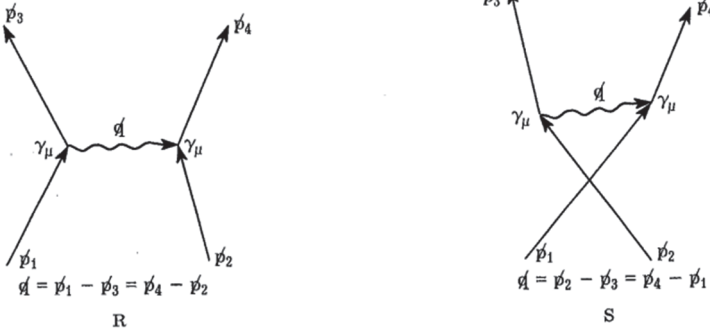


図 25-2

運動量表現で表される振幅は、次のように求められる。式(24-2)を、式(25-4)を使うことにより、

$$-ie^2 \sum_{\mu} \int [K_+(3,5)\gamma_{\mu}K_+(5,1)]_a \frac{-4\pi}{q^2} [K_+(4,6)\gamma_{\mu}K_+(6,2)]_b \frac{d^4q}{(2\pi)^4} d\tau_5 d\tau_6$$

と書き直することができる。電子の状態 1 は運動量 \vec{p}_1 の平面波、電子の状態 3 は運動量 \vec{p}_3 の平面波であるため、明らかに、運動量表示では最初の括弧のスピンノール部分が $(\tilde{u}_3\gamma_{\mu}u_1)$ 、2 番目の括弧のスピンノール部分が $(\tilde{u}_4\gamma_{\mu}u_2)$ となる。 τ_5 と τ_6 で積分すると、図の下に書いてある保存則が得られる。 q の積分を削除すると、直ちに、光子の伝播が運動量表現になる。これらより、行列要素は、

$$M = +i4\pi e^2 \left\{ \frac{(\tilde{u}_4\gamma_{\mu}u_2)(\tilde{u}_3\gamma_{\mu}u_1)}{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2} - \frac{(\tilde{u}_4\gamma_{\mu}u_1)(\tilde{u}_3\gamma_{\mu}u_2)}{(\vec{p}_4 - \vec{p}_1)^2} \right\}$$

と書くことができる。この式の右辺第 1 項はダイアグラム R から、第 2 項はダイアグラム S から生じており、 μ に関する和を意味している。重心系では、単位時間あたりの遷移確率は、

$$\text{単位時間あたりの遷移確率} = \sigma v_1 = \frac{2\pi}{(2E)^4} |M|^2 \frac{E^2 p^3}{(2\pi)^3 2Ep^2} d\Omega$$

である (第 19 回講義の終状態密度を参照のこと)。第 23 回講義の方法を用いて、初期スピン状態の平均化と最終スピン状態の和をとることができる。例え

ば、 R 行列と \bar{R} 行列の積、それに S 行列と \bar{R} 行列の積と \tilde{S} 行列と R 行列の積の和から得られるスピン状態の総和は、

$$\bar{R}R \rightarrow \frac{\text{Sp}\{(\vec{p}_4 + m)\gamma_\mu(\vec{p}_2 + m)\gamma_\nu\}\text{Sp}\{(\vec{p}_2 + m)\gamma_\mu(\vec{p}_1 + m)\gamma_\nu\}}{\{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2\}^2}$$

$$\bar{R}S + R\tilde{S} \rightarrow \frac{\text{Sp}\{(\vec{p}_4 + m)\gamma_\nu(\vec{p}_1 + m)\gamma_\mu(\vec{p}_3 + m)\gamma_\nu(\vec{p}_2 + m)\gamma_\mu\}}{(\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2(\vec{p}_4 - \vec{p}_1)^2}$$

である。第 23 回講義で示したシュプールを使った関係をうまく利用すれば、次のような微分断面積が得られる（あるいは、表 13-1 を用いて直接 M を計算することもできる）。

$$d\sigma = \frac{e^4 d\Omega}{16E^2} \left\{ \frac{4x^2 + 8x \cos \theta + 6 + 2\cos^2 \theta - 4 \cos \theta}{(1 - \cos \theta)^2} + \frac{4x^2 - 8x \cos \theta + 6 + 2\cos^2 \theta + 4 \cos \theta}{(1 + \cos \theta)^2} - \frac{4(1+x)(x-3)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} \right\}$$

ここで、 $x = E^2/p^2$ である。これは、メラー散乱と呼ばれている（図 25-3）。

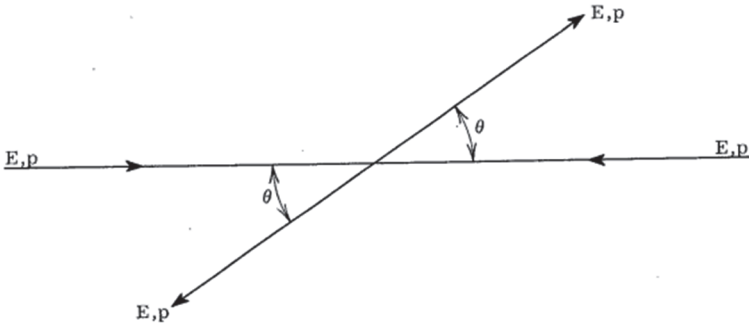


図 25-3

問題：(1) この方法で、陽電子・電子散乱を計算しなさい。

(2) μ 粒子がノックオン電子を生成する断面積を求めよ（粒子の衝突により原子あるいは原子核から叩き出された電子をノックオン電子という）。

μ 粒子は $S=1/2$ でディラック方程式を満たし、異常磁気モーメントはないと仮定する。粒子は識別可能で、それゆえ粒子の交換はないことを思い出すこと。

(3) 陽子は構造を持たず、異常モーメントを持つと仮定して、予想される電子-陽子散乱断面積を計算しなさい。陽子のディラック方程式は、第 12 回講義を参照すると、

$$(i\vec{\nabla} - M - e\vec{A} - \frac{\mu}{4M}\gamma_\mu\gamma_\nu F_{\mu\nu})\Psi = 0$$

と書ける。陽子の磁気モーメント $\mu = 1.7896$ である。したがって、摂動ポテンシャルは、

$$e\vec{A} + \frac{e\mu}{4M}\gamma_\mu\gamma_\nu(\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu)$$

となる。光子との結合は、

$$e\vec{e} + \frac{e\mu}{4M}(\vec{q}\vec{e} - \vec{e}\vec{q})$$

あるいは、

$$e\gamma_\mu + \frac{e\mu}{4M}(\vec{q}\gamma_\mu - \gamma_\mu\vec{q})$$

とすることができる。

4 つの偏光の和

古典電磁力学では、常に縦波は横波と瞬時に作用するクーロン相互作用で代用でき、除くことが可能である。これは、フェルミが用いた方法（第 1 回講義参照）である。4 つの偏光の和も横波と等価であるが、瞬時に作用するクーロン相互作用があることが実証できる。空間方向 x, y, z を選ぶ代わりに、 Q (光子の運動量) に平行な方向 1 つと Q に直交する方向 2 つを選ぶことで行列要素は、

$$\frac{M}{i4\pi e^2}$$

$$= (\tilde{u}_4 \gamma_t u_2) \frac{1}{q^2} (\tilde{u}_3 \gamma_t u_1) - (\tilde{u}_4 \gamma_t u_2) \frac{1}{q^2} (\tilde{u}_4 \gamma_Q u_1) - \sum_{2tr.dir.ec.} (\tilde{u}_4 \gamma_{tr} u_2) \frac{1}{q^2} (\tilde{u}_3 \gamma_{tr} u_1)$$

と書くことができる。 γ_Q は Q 方向の γ 行列、 γ_{tr} はいずれかの横方向における γ 行列を表す。一般に、 $\vec{q} = q_4 \gamma_t - Q \gamma_Q$ の行列要素は、ゲージ不変性の議論¹から、0 である。したがって、 γ_Q は $(q_4/Q) \gamma_t$ で置き換えることができ、その結果は、

$$\begin{aligned} \frac{M}{i4\pi e^2} &= (\tilde{u}_4 \gamma_t u_2) \frac{1}{q^2} \left(1 - \frac{q_4^2}{Q^2} \right) (\tilde{u}_3 \gamma_t u_1) - \sum_{1,2} (\tilde{u}_4 \gamma_{tr} u_2) \frac{1}{q^2} (\tilde{u}_3 \gamma_{tr} u_1) \\ &= -(\tilde{u}_4 \gamma_t u_2) \frac{1}{Q^2} (\tilde{u}_3 \gamma_t u_1) - \sum_{1,2} (\tilde{u}_4 \gamma_{tr} u_2) \frac{1}{q^2} (\tilde{u}_3 \gamma_{tr} u_1) \end{aligned}$$

である。ここで、 $1/Q^2$ は運動量空間におけるクーロン場を表し、 γ_t は電流密度の第 4 成分である。このため、第 1 項はクーロン相互作用を表し、第 2 項は横波による相互作用を表している。

いろいろな「補正」項の解説と解釈

第 26 回講義

量子電磁力学の理論における電子の振る舞いは、多くの場合、「補正」項を除けば、より単純な理論で予測されるものと同じであることがわかる。この章の目的は、このような場合をいくつか指摘し、それを議論することである。

電子-電子相互作用

この相互作用の最も簡単なダイアグラムを図 26-1 に示す。運動量表示で、2 つの電子が交換する運動量を $q \equiv (Q, q_4)$ 、 Q とすると、この過程の振幅は、

$$(\tilde{u}_3 \gamma_\mu u_1) (\tilde{u}_4 \gamma_\mu u_2) \frac{1}{q^2}$$

に比例することが分かっている。

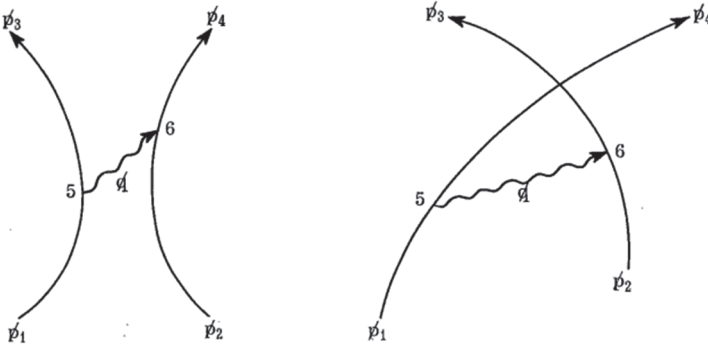


図 26-1

また、 $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_3$ であるので、

$$(\tilde{u}_3 \vec{q} u_1) = (\tilde{u}_3 (\vec{p}_1 - \vec{p}_3) u_1) = 0$$

が成り立つ。この恒等式から、先ほどの過程の振幅は

$$\left\{ -(\tilde{u}_3 \gamma_t u_1) (\tilde{u}_4 \gamma_t u_2) \frac{1}{Q^2} \right\} - \sum_{1,2} (\tilde{u}_3 \gamma_{tr} u_1) (\tilde{u}_4 \gamma_{tr} u_2) \frac{1}{q^2}$$

と等価であることを前回の講義で導いた。第 1 項をフーリエ変換すると、純粋な瞬間的クーロンポテンシャルの運動量表現であることがわかる。次に第 2 項は、単純なクーロン相互作用に対する補正を構成する。ここで γ_{tr} は \mathbf{Q} の方向に直交する 2 つの方向の γ を表している。

遅い電子の場合、クーロンポテンシャルの補正は簡単な方法で行うことができる。なお、この場合、

$$\mathbf{Q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$$

であり、

$$\begin{aligned} q_4 = E_1 - E_2 &\approx \left\{ m + \frac{p_1^2}{2m} \right\} - \left\{ m + \frac{p_3^2}{2m} \right\} = \frac{p_1^2 - p_3^2}{2m} = \frac{p_1 + p_3}{2m} (p_1 - p_3) \\ &\approx v(p_1 - p_3) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $q_4^2 \sim v^2 Q^2$ と近似し、分母の q^2 を $-Q^2$ で置き換えること (誤差は小さい) ができる (C.G 系では、 $q_4 = 0$ が正確に成り立つ)。この補正項は、

$$+ \sum_{1,2} (\tilde{u}_3 \gamma_{tr} u_1) (\tilde{u}_4 \gamma_{tr} u_2) \frac{1}{Q^2}$$

となるが、

$$(\tilde{u}_3 \gamma_{tr} u_1) \equiv u_3^* \alpha_{tr} u_1$$

である。ここで、 $u = \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix}$ の u_a が大きい部分、 u_b が小さい部分であることを想起すると、非相対論的近似は (式 (11-6) を参照)、

$$u_b \approx \frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) u_a$$

となる。

また、

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

から、(正のエネルギー状態間をとって)

$$\begin{aligned} u_3^* \alpha_{tr} u_1 &= (u_{3a}^* \quad u_{3b}^*) \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}_{tr} \begin{pmatrix} u_{1a} \\ u_{1b} \end{pmatrix} = (u_{3a}^* \boldsymbol{\sigma} u_{1b} + u_{3b}^* \boldsymbol{\sigma} u_{1a})_{tr} \\ &= \frac{1}{2m} (u_{3a}^* \boldsymbol{\sigma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}_1) + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}_3) \boldsymbol{\sigma} u_{1a})_{tr} \end{aligned}$$

であることがわかる。自由 (束縛のない) 空間 $\boldsymbol{\pi} \equiv \mathbf{p}$ では、前述の行列の x 成分は、例えば、 $\boldsymbol{\sigma}$ 行列の交換関係を用いることで、

$$\begin{aligned} &\sigma_x (\sigma_x p_{1x} + \sigma_y p_{1y} + \sigma_z p_{1z}) + (\sigma_x p_{3x} + \sigma_y p_{3y} + \sigma_z p_{3z}) \sigma_x \\ &= (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3)_x + i \{ \sigma_z (p_1 - p_3)_y - \sigma_y (p_1 - p_3)_z \} \end{aligned}$$

となる。このことから、クーロンポテンシャルの補正による振幅は、

$$\begin{aligned} \sum_{1,2} \frac{1}{Q^2} \left[u_{3a}^* \left\{ \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3}{2m} - i \frac{\boldsymbol{\sigma} \times (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)}{2m} \right\}_{tr} u_{1a} \right] \\ \times \left[u_{4a}^* \left\{ \frac{\mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_2}{2m} - i \frac{\boldsymbol{\sigma} \times (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4)}{2m} \right\}_{tr} u_{2a} \right] \end{aligned}$$

という形で記述することが容易にできる。2つの大括弧内の1つめの項は \mathbf{Q} を運ぶ電子の運動によるカレントを表し、2つめの項は磁気双極子の横向き成分

を表している。つまり、この補正項は、電子間のカレント-カレント、カレント-双極子、双極子-双極子の相互作用から生じていることがわかる。これらの相互作用は古典論に基づいても予想されることで、量子電磁力学構築以前にブライト (Gregory Breit, 1899~1981) によって記述されたため、ブライト相互作用と呼ばれている。

補正因数が生じる双極子-双極子項を考える。これは、 $\mathbf{Q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4$ なので、

$$\frac{\sum_{1,2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \times \mathbf{Q})_{tr} (\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{Q})_{tr}}{Q^2}$$

である。しかし、 $\boldsymbol{\sigma}$ と \mathbf{Q} が同じ向きであれば $\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{Q}$ は 0 であるため、和は 3 つの方向すべてにわたってもよく、そうすれば内積と等しくなる。つまり、この補正の項は

$$\frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \times \mathbf{Q}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{Q})}{Q^2}$$

となる。フーリエ変換²をすると、前述のように、これは 2 つの双極子の相互作用の運動量表現であることがわかる。

上で用いた近似 $q_4 \sim (v/c)Q$ は、正のエネルギー状態間でのみ適用されることに注意しておくこと。例えば、状態の 1 つが陽電子を表しているなら、

$$\begin{aligned} q_4 &= E_1 - E_2 \neq 0 \\ &= 2m \end{aligned}$$

である。しかし、 $2m$ は非常に大きいので、補正はまだ小さい。それでも解析をやり直す必要がある。

電子-陽電子相互作用

電子と陽電子は区別できるため、パウリ原理では交換ダイアグラムが不要となるため、考えるべき過程は図 26-2 だけとなる。

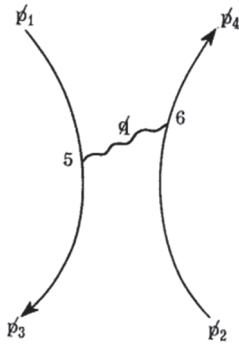


図 26-2

しかし、同様な現象論的な理由で、電子と陽電子が仮想的に消滅し、後に光子が新しい対生成させるダイアグラムである図 26-3 を考えることも可能である。これは、電子-陽電子対を仮想光子の形で一定時間存在していなくてはならないことが、実験による検証のために必要であることがわかった。

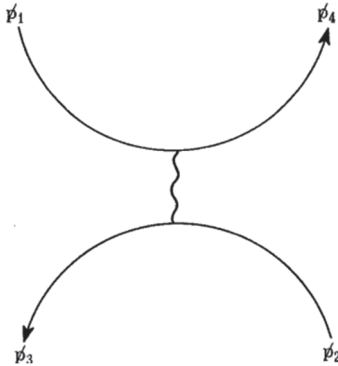


図 26-3

陽電子は時間に逆行して伝播する電子であるという観点から、図 26-3 と図 26-2 の違いは、「最終」状態 \vec{p}_3 と状態 \vec{p}_4 の入れ替えだけである。この場合に

もパウリの原理は適応される。2 つのダイアグラムの振幅は、どの粒子がどの矢印の意味で出ているかが違うだけなので、差し引かなければならない。

ポジトロニウム

電子と陽電子は、短時間であるが、ポジトロニウム（エキゾチック原子）という水素原子に似た結合状態となることがある。ポジトロニウムの基底状態は $1S$ 状態で、スピンの配置によって一重項または三重項の場合がある。配置の問題では、 $1S$ 状態は 2 光子でのみ対消滅し、 $3S$ 状態における対消滅崩壊は 3 光子のみである。2 光子対消滅の平均寿命は $(1/8) \times 10^{-9}$ 秒、3 光子対消滅の平均寿命は $(1/7) \times 10^{-8}$ 秒である。

問題：これまで計算した断面積とポジトロニウムの換算質量を用いた水素の波動関数を適応して、2 光子消滅の平均寿命が $(1/8) \times 10^{-9}$ 秒であることを確認しなさい。

図 26-2 は、ポジトロニウム保持に寄与しているクーロンポテンシャルを示している。同様なダイアグラムから得られる補正項（ブライトの相互作用）は、 $3S$ 状態と $1S$ 状態で異なる双極子-双極子またはスピン-スピン相互作用に関係する（電流-電流、スピン-スピン相互作用は両状態で同じである）。したがって、微細構造には $3S$ 状態と $1S$ 状態でのエネルギー準位に差が生じ、その値は 4.8×10^{-4} eV と水素原子の微細構造より大きい。

光子のスピンは 1、ポジトロニウムの $1S$ 状態はスピン 0 である。このことから図 26-3 のような過程は、 $1S$ 状態では角運動量保存則により起きない。しかし、 $3S$ 状態では起こり得る。この図から生じる項は小さく、したがって $3S$ と $1S$ 準位の別の微細構造でのエネルギー準位の差が起こる。この差は、スピン-スピン相互作用と同程度の 3.7×10^{-4} eV である。これを「新しい消滅力」による差という。

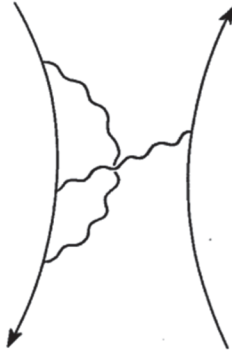


図 26-4

図 26-3 から生じる項を計算するには、

$$-\frac{1}{q^2}(\bar{u}_4\gamma_\mu u_1)(\bar{u}_3\gamma_\mu u_2)$$

を計算する必要がある。

この場合 $q^2 \approx 4m^2$ (重心系では $Q=0$)、行列要素はすべて 1 か 0 (粒子はポジトロニウムの中では基本的に静止しているとみなす) なので、結果は単なる数字になる。つまり、フーリエ変換をすると、実空間での相互作用に対する電子と陽電子の相対座標の δ 関数が得られる。このため、電子と陽電子の「短距離相互作用」と呼ばれることもある。

前述した効果による微細構造の分裂を合わせると、微細構造定数を α として、

$$\frac{1}{2}\alpha^2\text{Rydberg}\left(\frac{7}{3}\right)$$

で表されることがわかる。これは、周波数をエネルギーの指標とすると 2.044×10^5 Mc である。しかし、図 26-4 のダイアグラムのよう、電子や陽電子が自ら光子を放出したり再吸収したりする、まだ言及されていない別の補正が存在する。これを考慮すると、ポジトロニウムの微細構造分裂は、

$$\frac{1}{2}\alpha^2\text{Rydberg}\left\{\frac{7}{3}-\left(\frac{32}{9}+2\ln 2\right)\frac{\alpha}{\pi}\right\}$$

で与えられ、 $2.0337 \times 10^5 \text{ Mc}$ の値を持つ。陽電子の微細構造の実験値は $(2.035 \pm 0.003) \times 10^5 \text{ Mc}$ なので、この最後の補正は主要な項より α のオーダー程度小さいが、実験との一致を得るために必要であることが分かる (参照 Phys. Rev., **87** (1952) 848)。これは、水素の $^2S_{1/2}$ 準位と $^2P_{1/2}$ 準位の間の遷移を起こさせることが、ラム (Willis Eugene Lamb, 1913～2008) によって実験的に観測されたためラム・シフトという (ポジトロニウムにおいても水素原子同様である)。一般には、後に述べる電子の自己相互作用の項目に含まれる。

電子・陽電子間の 2 光子交換

図 26-5 に示したように、1 個の光子ではなく 2 個の光子を交換する過程が起こることは容易に想像がつく。これまで、実験との一致を確保するために、このような高次の過程を考える必要はなかったが、実験技術の発展があれば、必要になるだろう。これらの過程の振幅は書き表すことは簡単だが、それを計算することは難しい。

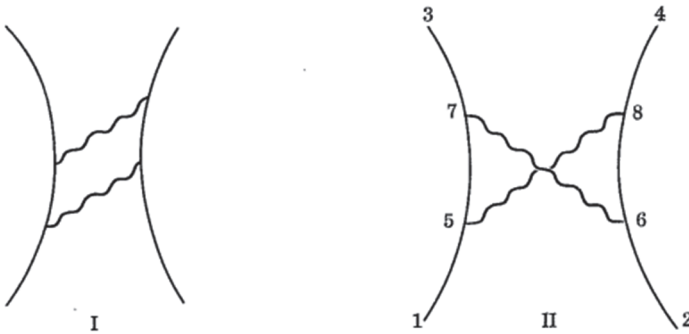


図 26-5

II の場合の振幅は、時空表現では、例えば、

$$\begin{aligned}
 & -e^4 \int \int \int \int \{K_+(3,7)\gamma_\nu K_+(7,5)\gamma_\mu K_+(5,1)\} \{K_+(4,5)\gamma_\mu K_+(8,6)\gamma_\nu K_+(6,2)\} \\
 & \quad \times \delta_+(s^2_{7,6})\delta_+(s^2_{5,8})d\tau_5 d\tau_6 d\tau_7 d\tau_8
 \end{aligned}$$

である。運動量表現では、

$$-(4\pi)^2 e^4 \int \left(\tilde{u}_3 \gamma_\nu \frac{1}{\vec{p}_1 - \vec{k}_1 - m} \gamma_\mu u_1 \right) \left(\tilde{u}_4 \gamma_\mu \frac{1}{\vec{p}_2 - \vec{k}_2 - m} \gamma_\nu u_2 \right) \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4 k_1^2 k_2^2}$$

となる。ここで、

$$\vec{p}_2 - \vec{k}_2 + \vec{k}_1 = \vec{p}_4 \quad \text{あるいは} \quad \vec{k}_2 = \vec{p}_2 + \vec{k}_1 - \vec{p}_4$$

である (図 26-6 参照)。このように、 \vec{k}_1 と \vec{k}_2 は互いに独立に決定することはできないが、運動量は 2 つの光子の間で任意の割合で共有される可能性がある。このため、振幅の式の \vec{k}_1 に対する積分が生じる。

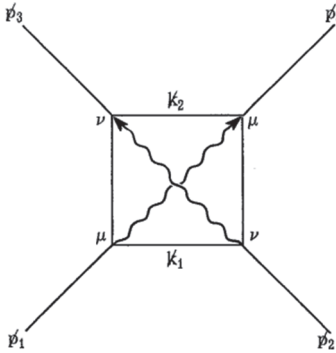


図 26-6

第 27 回講義

電子の自己エネルギー³

第 26 回講義で次の考えを紹介した。図 27-1 のように、電子は光子を放出し、その後、同じ光子を吸収することがある。そこで、点 1 から点 2 へ移動する自由電子の伝播核には、この可能性を含む項がなくてはならない。1 次項 (光子の放出と吸収が 1 つずつ) のみを含む核は、

$$K(2,1) = K_+(2,1) - ie^2 \iint K_+(2,4) \gamma_\mu K_+(4,3) \gamma_\mu K_+(3,1) \delta_+(s_{4,3}^2) d\tau_4 d\tau_3 \quad (27-1)$$

となる。

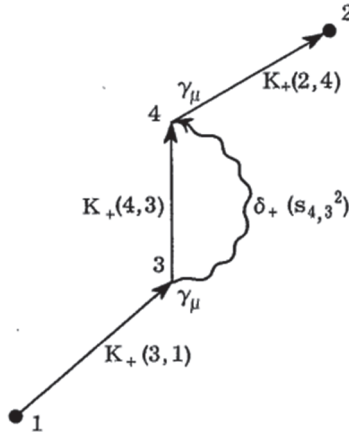


図 27-1

この式の補正項は、散乱過程の通常の手順に従って、ダイアグラムの洞察によって書き下ろされる。今回の場合、初状態の運動量と終状態の運動量は同じである。したがって、摂動行列の非対角要素はすべて 0 になる。対角要素は、結果として、得られる粒子の波動関数が同じ固有状態に留まる。時間に依存しない摂動に対しては、摂動が加えられた時間間隔 T に比例した位相の変化のみが波動関数に影響を与えることが摂動論の研究で示されている。その結果、波動関数は

$$\exp(-iE_n T) \exp\{-i(\Delta E)T\} \quad (27-2)$$

である。

摂動効果 $(\Delta E)T$ が小さいことから、2 番目の指数関数を $1 - i(\Delta E)T + \dots$ と展開し、この高次項を無視することができる。式 (27-1) の右辺の積分で表されるのはこの展開の第 2 項である。この表現は、ある種の規格化係数が 2 つの式で異なっているので、等式で表すまでにはいたっていない。

等式とするには、次のようにする。第 1 に、事象の起こる確率は点 3 と点 4 の間の時間と空間の間隔にのみ依存し、空間と時間の変数の絶対値にはまったく依存しないことが明らかである。そこで、 $d\tau_4$ が 3 と 4 の間の区間（時間と空間）の要素を表すように変数を変更したとする。式 (27-1) の積分を

$$\iint \tilde{f}(4)\gamma_\mu K_+(4,3)\gamma_\mu \delta_+(s_{4,3}^2)f(3)d\tau_4 d^3\mathbf{x}_3 dt_3 \quad (27-3)$$

と記述する。ここで、演算子 K_+ と δ_+ が区間 3-4 にのみ依存することは明らかである。

第 2 に、式 (27-2) は波動関数の時間依存部分 $\exp(-iE_n t)$ を含んでいるが、これは使用する波動関数に時間因子が含まれないと仮定しているためである。式 (27-3) においては、すでに $f(3)$ と $f(4)$ に時間依存部分が含まれているので、式 (27-2) では省略する必要がある。

第 3 に、波動関数の規格化が 2 つのアプローチで異なっている。式 (27-2) に至る展開では、規格化

$$\int \Psi^* \Psi dv = 1$$

を用いた。ここでは、 V を体積として、

$$\int u^* u dv = (2E/m^3) \cdot V \quad (27-4)$$

という規格化を用いた。したがって、等式を成立させるには、式 (27-3) を式 (27-4) の規格化積分で除算する必要がある。その結果、式は

$$-i\Delta ET = \frac{-ie^2 \iint \tilde{f}(4)\gamma_\mu K_+(4,3)\gamma_\mu \delta_+(s_{4,3}^2)f(3)d\tau_4 d^3\mathbf{x}_3 dt_3}{2E \cdot V}$$

となる。 $d^3\mathbf{x}_3$ の積分は V となり分母と相殺し、 dt_3 の積分は T となり左辺と相殺し、最終的に

$$2E\Delta E = +e^2 \int \tilde{u}\gamma_\mu K_+(4,3)\gamma_\mu \delta_+(s_{4,3}^2)u d\tau_4 \quad (27-5)$$

となる。なお、この積分は相対論的不変である。それに、 p は摂動の前後で同じで、 $E^2 = m^2 + p^2$ から、 E の変化は、

$$2E\Delta E = 2m\Delta m$$

なので、電子質量の変化と捉えることができる。この式を用いて、運動量空間に変換すると

$$\Delta m = \frac{4\pi e^2}{2mi} \int \tilde{u} \left(\gamma_\mu \frac{1}{\vec{p} - \vec{k} - m} \gamma_\mu \right) u \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \quad (27-6)$$

となる。この積分は、

$$\gamma_\mu \frac{1}{\vec{p} - \vec{k} - m} \gamma_\mu = \frac{\gamma_\mu (\vec{p} - \vec{k} + m) \gamma_\mu}{\vec{p}^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{k} + k^2 - m^2} = \frac{2m + 2\vec{k}}{k^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{k}}$$

から、 $\vec{p}u = mu$ と第 10 回講義で得た関係を使って書き直すことができる。すなわち、式 (27-6) は、

$$\Delta m = \frac{4\pi e^2}{2mi} \int \tilde{u} (2m + 2\vec{k}) u \frac{d^4 k}{k^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{k}} \frac{1}{(2\pi)^4 k^2} \quad (27-6')$$

とできる。

この積分は発散する。この発散は 20 年来、量子電磁力学の大きな壁となっていた。この問題を解決するには、基本法則を変更する必要があった。そこで、光子の伝播核を $(1/k^2)$ ではなく $(1/k^2)c(k^2)$ とする。ここで、 $c(k^2)$ は $c(0) = 1$ 、それと $k^2 \rightarrow \infty$ で $c(k^2) \rightarrow 0$ となる関数とする。空間表現でこの修正は、

$$\delta_+(s_{1,2}^2) \rightarrow f_+(s_{1,2}^2) = \int \frac{1}{k^2} c(k^2) \exp(-ik \cdot x) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \quad (27-7)$$

の形をとる。

新しい関数 f_+ は、小さな区間でのみ δ_+ と大きく異なる。これは、関数のフーリエ展開から高振動数の成分を取り除くと、短距離の詳細な部分のみが修正されることから明らかである。この場合、関数が修正される区間の大きさは、おおよそ次のように記述できる。大きな数 λ^2 を考え、 $k^2 \ll \lambda^2$ である限りでは $c(k^2) \approx 1$ となる。すると (指数項より) 区間 $s^2 \approx 1/\lambda^2$ のときに差が生じる。この値を a^2 とすると、 f_+ の一般的な振る舞いは図 27-2 のようになる。したがって、 a^2 は f_+ の「平均幅」のような値である。仮に $a^2 \ll 1$ であるなら、区間の大きさは、

$$t^2 - r^2 = a^2 \quad t - r \approx \frac{a^2}{2r} \quad (27-8)$$

となる。 $f_+(s_{1,2}^2)$ の形の持つ意味は、次のことから理解できる。元の関数である $\delta_+(s_{1,2}^2)$ が 0 と異なるのは、 $s^2 = t^2 - r^2 = 0$ のときだけである。つまり、

電磁波の信号が距離 r の地点に到達するのは、 $t^2 - r^2 = 0$ または $t = r$ （すなわち光速が 1）のような時間 t のときだけなのである。 $f_+(s^2)$ については、もはやそのようなことはない。出発は、 $t - r$ の適量によって得られる。しかし、式 (27-8) により、 $r \gg a$ であるすべての値について、この適量は無視できる。したがって、 λ^2 に依存して、この規則はどのような実用的な距離でも影響を受けないことがわかる。

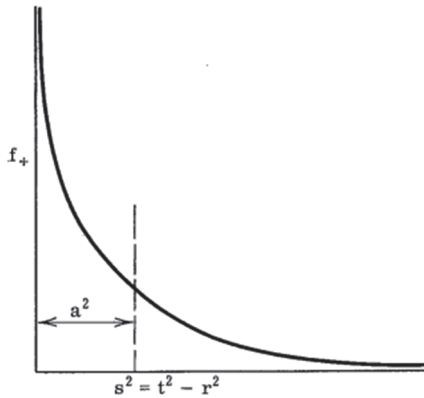


図 27-2

$\lambda^2 \gg m^2$ を選択すると、 $c(k^2)$ の実用的な（一般的な）表現は、

$$c(k^2) = \int G(\lambda) \frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} d\lambda$$

であるが、単純な形である

$$c(k^2) = \frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2}$$

を薦める。この形から伝播核

$$\frac{1}{k^2} \times \frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \lambda^2}$$

として求める。

この第 2 項は質量 λ の光子の伝播を表すためである。しかしながら、この負号の意味はこの観点からは今のところ説明していない。

この核の便利な表現が積分

$$-\int_0^{\lambda^2} \frac{1}{(k^2 - L)^2} dL \quad (27-9)$$

である。この核を式 (27-8') にある $1/k^2$ の代わりに使うと、

$$\int \frac{2m + 2\vec{k}}{k^2 - 2p \cdot k} \times \frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} \frac{d^4 k}{k^2} \quad (27-10)$$

が得られ、2 つの積分の和として書くことができる。非積分の分子にある m か \vec{k} かの違いだけ、つまり m あるいは k_σ ($\vec{k} = k_\sigma \gamma_\sigma$ なので) の違いに着目すればよい。

量子電磁力学に現れる積分の取り扱い

前節で現れたような積分を数多く取り扱わなくてはならない。このような積分を効率的に行う方法がある。ここでは、この積分の扱い方を説明する。これから積分は、次の 2 つの積分に集約できる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1; k_\sigma)}{(2\pi)^4 (k^2 + i\varepsilon - L)^3} d^4 k = \frac{(1; 0)}{32\pi^2 i L} \quad (27-11)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\{ax + b(1-x)\}^3} dx = \frac{1}{ab} \quad (27-12)$$

式 (27-11) では、さらに簡潔に記載するために、分子には 1 か k_σ のどちらかが入るという意味で表記 $(1; k_\sigma)$ を使った。その場合、右辺の $(1; 0)$ はそれぞれ 1 か 0 になる。これらのうち、最初のを証明するには、分子に k_σ がある場合、積分は奇数関数であることに注意すること。したがって、積分は 0 になる。分子に 1 がある場合は、経路積分が採用される。積分値

$$\iint \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\{\omega^2 + i\varepsilon - (L + K^2)\}^3} d\omega d^3 \mathbf{K}$$

とする。このとき、 $\varepsilon \ll L + k^2$ において、 $\omega = \pm\{\sqrt{L + k^2} - i\varepsilon\}$ で極をもつため、 ω の経路積分は、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega^2 + i\varepsilon - (L + K^2)} d\omega = \frac{2\pi i}{(-2)\sqrt{L + K^2}}$$

であり、上半面で積分路をとった⁴。 L に関して2回微分することで、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\{\omega^2 + i\varepsilon - (L + K^2)\}^3} d\omega = \frac{6\pi}{16i} \times \frac{1}{(L + K^2)^{5/2}}$$

が得られる。すると、残りの積分は

$$\begin{aligned} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{1}{(L + K^2)^{5/2}} d^3\mathbf{K} &= 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(L + K^2)^{5/2}} K^2 dK \\ &= 4\pi \left| \frac{K^3}{3L(L + K^2)^{3/2}} \right|_0^{\infty} = \frac{4\pi}{3L} \end{aligned}$$

となり、式(27-11)を示すことができた。式(27-11)の積分変数を $k - p$ とすると、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1; k_{\sigma})}{(2\pi)^4 (k^2 - 2p \cdot k - \Delta)^3} d^4k = \frac{(1; p_{\sigma})}{32\pi^2 i (p^3 + \Delta)} \quad (27-13)$$

となる。式(27-13)の両辺を Δ に関して、あるいは p_j に関して微分すると、直ちに

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1; k_{\sigma}; k_{\sigma} k_j)}{(2\pi)^4 (k^2 - 2p \cdot k - \Delta)^4} d^4k = - \frac{[1; p_{\sigma}; p_{\sigma} p_j - (1/2)\delta_{\sigma j}(p^2 + \Delta)]}{96\pi^2 i (p^2 + \Delta)^2}$$

が得られる。さらに微分すると引き続き、分子に多くの k 因子、分母に $(k^2 - 2p \cdot k - \Delta)$ の高次のべき乗を含む積分を直ちに解くことができる。

第28回講義

外部ポテンシャルによる自己エネルギー積分

前回の講義において、電子の自己エネルギーは、質量

$$\Delta m = \frac{4\pi e^2}{2mi} \int \frac{\bar{u}(2m + 2\vec{k})u}{k^2 - 2p \cdot k} \left(\frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} \right) \frac{1}{k^2} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \quad (28-1)$$

の変化に相当し、積分値

$$I = - \int_0^{\lambda^2} dL \int \frac{(1; k_\sigma)}{(k^2 - 2p \cdot k)(k^2 - L)^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \quad (28-2)$$

を使って表せることがわかった。また、積分

$$\int \frac{(1; k_\sigma)}{(k^2 - 2p \cdot k - \Delta)^3} dk = \frac{1}{32\pi^2 i} \times \frac{(1; k_\sigma)}{p^2 + \Delta} \quad (28-3)$$

もわかっている。定積分

$$\frac{1}{ab^2} = \int_0^1 \frac{2(1-x)}{\{ax + b(1-x)\}^3} dx \quad (28-4)$$

を用いて式 (28-2) の被積分関数の分母を

$$\frac{1}{(k^2 - 2p \cdot k)(k^2 - L)^2} = \int_0^1 \frac{2(1-x)}{\{k^2 - 2xp \cdot k - L(1-x)\}^3} dx$$

と表すと、式 (28-2) は

$$I = - \int_0^{\lambda^2} dL \int_0^1 \frac{d^4 k (1; k_\sigma) 2(1-x)}{\{k^2 - 2xp \cdot k - L(1-x)\}^3 (2\pi)^4} dx \quad (28-5)$$

となる。積分変数 k は式 (28-3) を用いて、 p に xp を、 Δ に $L(1-x)$ を代入すれば、

$$I = - \int_0^{\lambda^2} dL \int_0^1 \frac{(1; xp_\sigma) 2(1-x)}{32\pi^2 i \{x^2 p^2 + L(1-x)\}} dx, \quad p^2 = m^2$$

となる。 L での積分は初歩的で、

$$I = - \frac{2}{32\pi^2 i} \int_0^1 (1; xp_\sigma) \ln \frac{(1-x)\lambda^2 + m^2 x^2}{m^2 x^2} dx$$

が得られる。 $\lambda^2 \gg m^2$ のときは分子にある $m^2 x^2$ を無視できるので (確かに $x \approx 1$ のとき $(1-x)\lambda^2$ は $m^2 x^2$ に比べてさほど大きくないが、これが成り立つ区間は $\lambda^2 \gg m^2$ であるため非常に小さいので誤差は小さい)、 x で積分すると、

$$I \approx - \frac{1}{32\pi^2 i} \left[2 \left\{ \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) + 2 \right\}; p_\sigma \left\{ \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) - \frac{1}{2} \right\} \right], \quad \lambda \gg m^2$$

となる。質量の変化は、式 (28-1) より、

$$\Delta m = \frac{4\pi^2}{2mi} \times \frac{1}{32\pi^2 i} \left[\tilde{u} \left\{ 2m \left(2 \ln \frac{\lambda^2}{m^2} + 2 \right) + 2\bar{p} \left(\ln \frac{\lambda^2}{m^2} - \frac{1}{2} \right) \right\} u \right]$$

となる。 $\tilde{p}u = mu$ と $(\tilde{u}u) = 2m$ から、これは

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{e^2}{2\pi} \left\{ 3 \ln \left(\frac{\lambda}{m} \right) + \frac{3}{4} \right\} \quad (28-6)$$

と簡略化できる。ここで、 $(e^2/2\pi)$ の値は 10^{-3} 程度なので、 λ が m の何倍になっても、質量比の変化は大きくはないと考えられる。この結果の解釈は次のようになる。質量には λ に依存するシフト（ずれ）があるため、理論で決定することができない。実験により求められた質量と理論により求められた質量の関係を

$$m_{exp} = m_{th} + \Delta m \quad (28-7)$$

と仮定してみる。私たちの測定はすべて m_{exp} である。つまり自己相互作用が含まれており、自己相互作用のない質量 m_{th} を決定することはできない。もっと厳密に表現すると、

「 m_{th} と自己相互作用 $(e^2/\hbar c)$ を用いた理論は、 m_{exp} を用いた理論値に自己相互作用 $(e^2/\hbar c)$ を加え、そこから自由粒子での計算値 Δm を引いた値に等しい」

となる。

電子を自由粒子として扱える場合では、 $(e^2/\hbar c)$ 自己相互作用項が Δm 項を正確に打ち消し、これまで使った理論が正確に正しい。電子を自由粒子として扱えない場合では、 $(e^2/\hbar c)$ の自己作用は Δm 項と等しくはなく、これまで使った理論にわずかな補正が必要となる。この効果は、水素原子のラムシフトにつながる。このような効果を計算するために、ここでは、外部ポテンシャルによる電子の散乱に対する自己相互作用の効果を考えてみることにする。

外部ポテンシャルにおける散乱

外部ポテンシャルでの散乱のダイアグラムを図 28-1 に示す。この過程での自己相互作用の可能性を除いた関係は次の通りである。

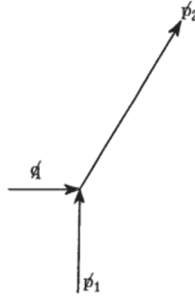


図 28-1

クーロンポテンシャル： $\vec{a}(q) = \gamma_t \frac{4\pi Ze}{Q^2} \delta(q_4)$

行列要素： $M = -ie(\bar{u}_2 \vec{a} u_1)$

保存則： $\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \vec{q}$

一次の自己相互作用は、図 28-2 のダイアグラムとなる。これら過程に関する振幅は通常の方法で求める。例えば、この図の I は、

$$I_1 = -4\pi e^2 \int \left(\bar{u}_2 \gamma_\mu \frac{1}{\vec{p}_2 - \vec{k} - m} \vec{a} \frac{1}{\vec{p}_1 - \vec{k} - m} \gamma_\mu u_1 \right) \frac{1}{k^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

を与える。分母を有理化して収束係数を入れるとこれは、

$$I_1 = -4\pi e^2 \int \frac{(\bar{u}_2 \gamma_\mu \{\vec{p}_2 - \vec{k} + m\} \vec{a} \{\vec{p}_1 - \vec{k} + m\} \gamma_\mu u_1)}{(k^2 - 2p_2 \cdot k)(k^2 - 2p_1 \cdot k)} \left(\frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} \right) \frac{1}{k^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \quad (28-8)$$

となる。この式は、光子の運動量 (k) が小さいと発散する（「赤外カタストロフィ」の結果であるが、後述するように、明確な物理的解釈がある）。一時的に、積分を収束させるために、 $\lambda_{\min}^2 \ll m^2$ において、ここで $d^4 k$ のものの k^2 を $(k^2 - \lambda_{\min}^2)$ に置き換えることにする。これは、積分を $k = \lambda_{\min}$ 近傍で切り捨てることと等しいことである。この物理的解釈は、第 29 回講義と第 30 回講義で行うことにする。

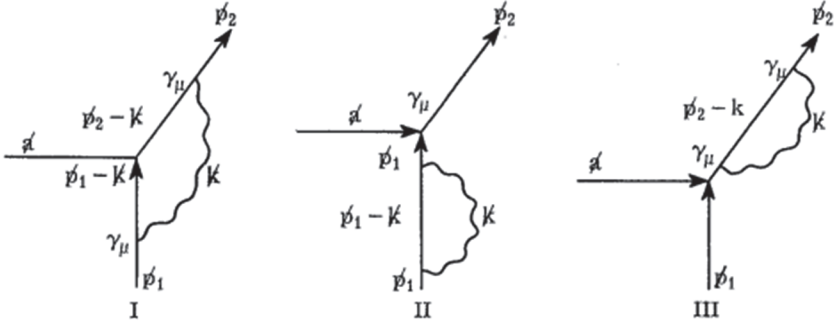


図 28-2

ここで k についての積分を簡単にするため、次の恒等式を用いる。

$$-\int_{\lambda_{min}^2}^{\lambda^2} \frac{1}{k^2 - L^2} dL = \frac{1}{k^2 - \lambda_{min}^2} - \frac{1}{k^2 - \lambda^2} = \frac{\lambda_{min}^2 - \lambda^2}{(k^2 - \lambda_{min}^2)(k^2 - \lambda^2)}$$

$$\approx \frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} \times \frac{1}{k^2 - \lambda_{min}^2}$$

近似の条件は、 $\lambda^2 \gg m^2 \gg \lambda_{min}^2$ である。この代入により積分は、

$$-\int_{\lambda_{min}^2}^{\lambda^2} dL \int \frac{(1; k_\sigma; k_\sigma k_\tau)}{(k^2 - 2p_1 \cdot k)(k^2 - 2p_2 \cdot k)(k^2 - L^2)^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

の形となる。

これらの積分を評価するために恒等式

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{1}{\{ay + b(1-y)\}^2} dy$$

を利用し、

$$\frac{1}{(k^2 - 2p_1 \cdot k)(k^2 - 2p_2 \cdot k)} = \int_0^1 \frac{1}{(k^2 - 2p_y \cdot k)^2} dy$$

を考える。ここで、 $p_y = yp_1 + (1-y)p_2$ である。変数 k 、 L 、 y の順に積分を行い、式 (28-6) を適当に用いて積分することで、状態 u_2 と u_1 の間で取るべき行列

$$M_1 = \frac{e^2}{2\pi} \left\{ 2 \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\min}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\tan \theta} \right) + \theta \tan \theta + \frac{4}{\tan 2\theta} \int_0^\theta \alpha \tan \alpha d\alpha \right\} \vec{a} \\ + \frac{e^2}{2\pi} \left\{ \frac{1}{4m} (\vec{q}\vec{a} - \vec{a}\vec{q}) \frac{2\theta}{\sin 2\theta} + r\vec{a} \right\} \quad (28-9)$$

が得られる。ここで、 $r = \ln(\lambda/m) + 9/4 - 2\ln(m/\lambda_{\min})$ 、 $4m^2 \sin^2 \theta = q^2$ である。

ダイアグラム II と III (図 28-2) から、 M_3 にある類似項を打ち消す関係 $M_2 + M_3 = -(e^2/2\pi)r\vec{a}$ が導けることが、第 30 回講義で示される。 q が小さいなら $\theta \approx (q^2)^{1/2}/2m$ 、また和 $M_1 + M_2 + M_3$ は、

$$M \approx \frac{e^2}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2m} (\vec{q}\vec{a} - \vec{a}\vec{q}) + \frac{4q^2}{3m^2} \vec{a} \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\min}} - \frac{3}{8} \right) \right\} \quad (28-10)$$

で近似することができる。

$(\vec{q}\vec{a} - \vec{a}\vec{q})$ は、

$$(\vec{q}\vec{a} - \vec{a}\vec{q}) = \gamma_\mu \gamma_\nu (q_\mu a_\nu - a_\mu q_\nu)$$

と書き出すことができる。しかし、 q_μ は勾配演算子で、これを座標表現で、

$$\gamma_\mu \gamma_\nu (\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu) = +\gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu}$$

と書くことができる (式 (7-1) を参照)。第 12 回講義を参照すると、粒子が異常な磁気モーメント μ を持つことの効果は、ディラック方程式に使われる通常のポテンシャル $\vec{a} = \gamma_\mu A_\mu$ からポテンシャル $\mu\gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu}$ を減じたことから生じたことがわかる。これはまさに式 (28-10) の第 1 項が行っていることである。自己相互作用補正のこの部分は、電子の磁気モーメントの補正のように見えるため、

$$\mu_{elec} = \frac{e}{2m} \left(1 + \frac{e^2}{2\pi} \right)$$

と書ける。なお、この結果 (および (28-9)、(28-10)) はカットオフ λ に依存しないので、ここで λ を無限大とすることができる⁵。

第 29 回講義

粒子がポテンシャルによって散乱されるとき、主な効果は \vec{a} である。これをダイアグラム I (図 28-2) で示した補正項が、

$$\frac{e^2}{2\pi} \left\{ 2 \left(\ln \frac{m}{\lambda_{min}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\tan \theta} \right) + \theta \tan \theta + \frac{4}{\tan 2\theta} \int_0^\theta \alpha \tan \alpha d\alpha \right\} \vec{a}$$

$$+ \frac{e^2}{8\pi m} (\vec{q}\vec{a} - \vec{a}\vec{q}) \frac{2\theta}{\sin 2\theta} + \frac{e^2}{2\pi} r \vec{a}$$

であることがわかった。

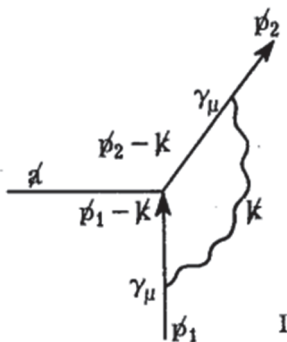


図 28-2-2

次に、ダイアグラム II とダイアグラム III (図 28-2) の複合効果を質量補正の効果と合わせて考えてみる。これは、次のようになる。

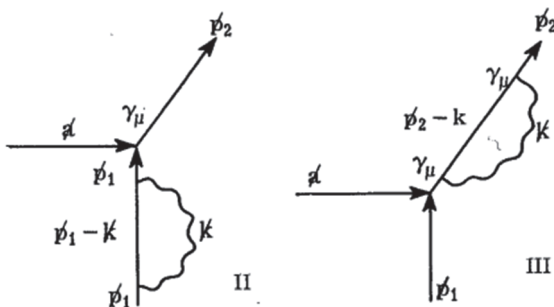


図 28-2-3

もう一つの補正項

$$-\frac{e^2}{2\pi}r\vec{a}$$

は、前述の式の最後の項と打ち消すだけである。ダイアグラム I、II、III で示される自己相互作用と質量補正の効果を同時に考える必要性を問うことは、「理論的」質量ではなく、実験的質量を内包する理論に発展させることを意味する。

ディラック方程式、

$$(i\vec{\nabla} - m_{th})\psi = e\vec{A}\psi$$

にある理論的質量 m_{th} を $m - \Delta m$ と置き換える (m は実験的質量) と、

$$(i\vec{\nabla} - m)\psi = e(\vec{A} + \Delta m)\psi$$

と書ける。質量補正 Δm は単なる数なので、運動量表現では運動量の δ 関数となる。したがって、前述の式から、運動量が 0 のポテンシャルとして振る舞い、行列を伴わないことがわかる。この効果をダイアグラムで表すと、図 29-1 になる。負号が使われているのは、ダイアグラム I、II、それに III (図 28-2) から得られる結果だけから、質量補正 Δm の効果を減じるためである。ダイアグラム II の振幅は、

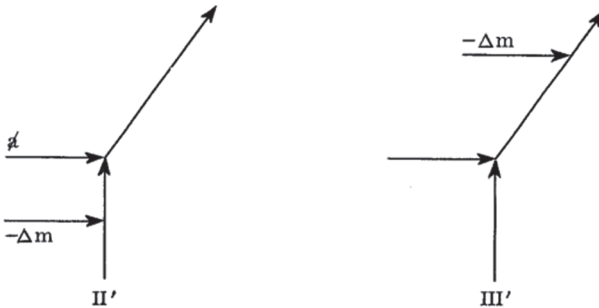


図 29-1

$$\bar{u}_2 \vec{a} \frac{1}{\vec{p}_1 - m} \left(-i4\pi e^2 \int \gamma_\mu \frac{1}{\vec{p}_1 - \vec{k} - m} \gamma_\mu \frac{1}{k^2 - \lambda_{min}} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} d^4k \right)$$

ダイアグラム Π' (図 29-1) では、

$$-\bar{u}_2 \bar{a} \frac{1}{\vec{p}_1 - m} (\Delta m) u_1$$

となると考えるかもしれない。しかし、ダイアグラム Π (図 28-2) の振幅のうち、括弧 () 内の部分はちょうど $\Delta m u_1$ なので、 Π と Π' は相殺されるように思える。ダイアグラム III と III' も同様である。しかしながら、これは間違いである。分母の $\vec{p} - m$ があるため、両者の振幅が無限大になることに原因があつて、そのことに気づかなかつたための過ちである。無限大どうしの差であるので、不定となる。このため、減算を正しく行えば 0 にならないことがわかる。

この減算を行うために提案された方法は、実際、ダイアグラム Π と III 、それに Π' と III' では自己相互作用と質量補正を合わせた複合効果を与えることになる。この方法は、電子は決して自由粒子としては振る舞わないという事実に基づいている。電子の過去は、常に一連の散乱を含んでおり、未来も同様である。これらの散乱は長い間起こっているが、それは有限であると考えことにする。こうすることで、これらの散乱の任意の 2 つの間の自己相互作用と質量補正の効果を計算すればよいことになる。何故なら、これらの散乱の各対の間では、結果は明らかに同じとなるからである。そこで、散乱の間隔の 1 つについて計算された補正と等しい補正を、各散乱におけるポテンシャルに関連付ける（間隔の数と散乱の数は等しい）だけで、その効果を説明することが可能となる。そして、今回のように一つの散乱事象を考えると、このポテンシャルの補正は、ダイアグラム Π と III 、それに Π' と III' のすべての効果を表していることになる。

電子がまったく自由ではないなら $p^2 \neq m^2$ であるので、

$$p^2 = m^2(1 + \varepsilon)^2$$

で代用できる。不確定性原理により、

$$m\varepsilon = \frac{\hbar}{T}$$

である。 T は散乱の間隔である。 T は大きいので、 ε は小さな量である。 p_0 を自由電子の運動量として、 $\vec{p} = (1 + \varepsilon)\vec{p}_0$ とする。

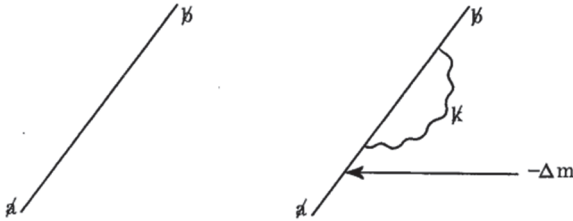
\vec{a} と \vec{b} を a と b (任意の 2 つの散乱) における散乱ポテンシャルの運動量表示とすると、初期状態 a から摂動なしで最終状態 b に遷移する振幅の行列の ε 次項は、

$$\vec{b} \frac{1}{\vec{p}-m} \vec{a} = \vec{b} \frac{\vec{p}+m}{p^2-m^2} \vec{a} = \frac{\vec{b}(\vec{p}+m)\vec{a}}{2m^2\varepsilon}$$

である。自己相互作用と質量補正の摂動を加えると、この行列は、

$$i4\pi e^2 \int \vec{b} \frac{1}{\vec{p}-m} \gamma_\mu \frac{1}{\vec{p}-\vec{k}-m} \gamma_\mu \frac{1}{\vec{p}-m} \vec{a} \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda_{min}^2} \left(\frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} \right) - \vec{b} \frac{1}{\vec{p}-m} \Delta m \frac{1}{\vec{p}-m} \vec{a}$$

となる。



(a) 摂動なしの場合 (b) 自己相互作用と質量補正の摂動がある場合

図 29-2

この行列の値を非摂動行列の値と比較することで、目的の補正項が得られる (図 29-2 参照)。

問題：2 つの非交換 (または交換) 演算子 A と B について、次の展開が成り立つことを示しなさい。

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} - \dots$$

この問題の結果を用いると、

$$\frac{1}{\vec{p}-\vec{k}-m} = \frac{1}{\vec{p}_0 + \varepsilon \vec{p}_0 - \vec{k} - m} \approx \frac{1}{\vec{p}_0 - \vec{k} - m} - \frac{1}{\vec{p}_0 - \vec{k} - m} \varepsilon \vec{p}_0 \frac{1}{\vec{p}_0 - \vec{k} - m} + \dots$$

と記述することで、前述の行列は、

$$\begin{aligned} & i4\pi e^2 \int \vec{b} \frac{\vec{p}+m}{2m^2\varepsilon} \gamma_\mu \frac{1}{\vec{p}_0 - \vec{k} - m} \gamma_\mu \frac{\vec{p}+m}{2m^2\varepsilon} \vec{a} \frac{d^4k}{k^2 - \lambda_{\min}^2} \left(\frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} \right) \\ & - i4\pi e^2 \int \vec{b} \frac{\vec{p}+m}{2m^2\varepsilon} \gamma_\mu \frac{1}{\vec{p}_0 - \vec{k} - m} \vec{p}_0 \frac{1}{\vec{p}_0 - \vec{k} - m} \gamma_\mu \frac{d^4k}{k^2 - \lambda_{\min}^2} \frac{\vec{p}+m}{2m^2\varepsilon} \vec{a} \left(\frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} \right) \\ & \quad - \vec{b} \frac{\vec{p}+m}{2m^2\varepsilon} \Delta m \frac{\vec{p}+m}{2m^2\varepsilon} \vec{a} \end{aligned}$$

となる。第1項と最後の項は ε のオーダーの項まで同じであるから、キャンセルしてもよい。第2項の積分は、ダイアグラム I (図 28-2) の計算ですでに基本的に行っているが、ここでは \vec{p}_0 が \vec{a} 、 \vec{p}_1 、 \vec{p}_2 を置き換わるため、この場合 $\vec{q} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = 0$ となり、結果

$$- \frac{e^2}{2\pi} r \vec{b} \frac{\vec{p}+m}{2m^2\varepsilon} \vec{p}_0 \frac{\vec{p}+m}{2m^2} \vec{a}$$

となる。この ε のオーダーでは、分子の \vec{p} を \vec{p}_0 に置き換えることができる。また、 $\vec{p}_0 u = mu$ から、

$$(\vec{p}_0 + m) \vec{p}_0 (\vec{p}_0 + m) \equiv 2m^2 (\vec{p}_0 + m)$$

となり、前述の結果を

$$- \frac{e^2}{2\pi} r \vec{b} \frac{\vec{p}+m}{2m^2\varepsilon} \vec{a}$$

B と記してもよいことに留意しておく。これは、摂動がない場合の行列の $-(e^2/2\pi)r$ 倍となっている。したがって、ダイアグラム II、III、II'、III' による補正項は、前述のように、散乱ポテンシャル \vec{a} を $-(e^2/2\pi)r\vec{a}$ で置き換えるだけで得られる。

ここでの注意点は、先ほど明らかにした自己相互作用と質量補正の適切な引き算を求めることの難しさが、量子電磁力学の「発散」問題を表しているわけではないということである。例えば、ポテンシャルの基準としてゼロでない値

を選んだ場合、つまり、自由電子がゼロでない一様なポテンシャルの中を運動しているとした場合、非相対論的量子力学でも同様に起こりうる典型的な問題なのである。この場合、自由電子に対して、ここでいう質量補正に類似した「エネルギー補正」が生じることは、容易に確認できるだろう。

そして、「理論エネルギー」を使って散乱過程の振幅を計算し、「エネルギー補正」の効果を差し引くと、自由電子の波動関数を使った場合には、無限項の差が現れることになる。

この単純なケースでは、確かに無限項は適切な引き算をすればキャンセルされるが、原理的には今回の問題と同じである。

最後に、自己相互作用と質量補正に起因する完全な補正項は、

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{2\pi} \left\{ 2 \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\min}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\tan 2\theta} \right) + \theta \tan \theta + \frac{4}{\tan 2\theta} \int_0^\theta \alpha \tan \alpha d\alpha \right\} \vec{a} \\ + \frac{e^2}{8\pi m} (\vec{q}\vec{a} - \vec{a}\vec{q}) \frac{2\theta}{\sin 2\theta} \end{aligned}$$

であることを記しておく。

赤外破綻の解決

先ほど求めた補正項から、光子を放出しない電子の散乱の断面積は e^2 のオーダーで

$$\sigma = \sigma_0 \left[1 - \frac{e^2}{2\pi} \left\{ 2 \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\min}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\tan 2\theta} \right) + (\lambda_{\min} \text{に依存しない項}) \right\} \right]$$

となる。ここで、 σ_0 はポテンシャル \vec{a} の場合だけの断面積である。この断面積は $\lambda_{\min} \rightarrow 0$ で対数発散し、この発散が生じる振る舞いを赤外破綻（赤外カストロフィ）という。

しかし、この結果は、光子を発生させずに電子を散乱させることは不可能であるという物理的事実から生じている。電子が散乱されるとき、電荷の移動に伴い、電磁場は運動量 p_1 から運動量 p_2 に変化しなければならない。この場の変化には必ず放射が伴う。

制動放射の理論において、低エネルギーの光子 1 つを放射する断面積は

$$\sigma = \sigma_0 \frac{e^2}{\pi} \frac{d\Omega_\omega}{4\pi} \left(\frac{\omega \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{e}}{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q}} - \frac{\omega \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{e}}{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q}} \right)^2 \frac{d\omega}{\omega}$$

であることが示されている。

問題：前述の断面積にある偏光の和と全方向で積分を行うと

$$\sigma = \sigma_0 \frac{2e^2}{\pi} \left(1 - \frac{2\theta}{\tan 2\theta} \right) \frac{d\omega}{\omega}$$

となることを示しなさい。ただし、 $\sin^2 \theta = -(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^2 / 4m^2$ とする。したがって、 $k = 0$ と $k = K_m$ の間で任意の光子を放出する確率は、

$$\sigma_0 \frac{2e^2}{\pi} \left(1 - \frac{2\theta}{\tan 2\theta} \right) \int_0^{K_m} \frac{d\omega}{\omega} = \sigma_0 \frac{2e^2}{\pi} \left(1 - \frac{2\theta}{\tan 2\theta} \right) \ln \frac{K_m}{\lambda_{min}}$$

となる。これは対数的に発散する。

したがって、発散する散乱断面積のジレンマは、実は不適切な疑問から生じている。光子の放出がない状態で散乱することはあるのか。こう問うのではなく、次のように問うべきである。 K_m 以上のエネルギーを持つ光子が放出されないで散乱は起こるのか。何故なら、非常に柔らかい光子は常に放出されるからである。

そうすると、最後の問いかけの求められる答えは、効果的に、散乱により光子が放出されない可能性、 K_m 以下のエネルギーの光子が 1 個放出される可能性、 K_m 以下の光子が 2 個放出される可能性（ただし、これらの項は e^4 以上のオーダーなので無視される）である。

これらの各項は、実際のところ無限大となるが、 λ_{min} の工夫により一時的に有限であるようにした。しかし、これらの和は、これまでの結果から次のように書くことができるため発散しない。

(K_m より大きなエネルギーの光子が放出されない散乱の可能性)

$$= \sigma_0 \left[1 - \frac{e^2}{\pi} \left\{ 2 \left(\ln \frac{m}{\lambda_{min}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\tan 2\theta} \right) \right\} + \left(\lambda_{min} \text{ に依存しない項} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & +\sigma_0 \frac{2e^2}{\pi} \left(1 - \frac{2\theta}{\tan 2\theta}\right) \ln \frac{K_m}{\lambda_{min}} + \left(e^4 \text{ オーダーの項}\right) \\
 & = \sigma_0 \left\{ \left(1 - \frac{e^2}{\pi} 2 \ln \frac{m}{K_m}\right) \left(1 - \frac{2\theta}{\tan 2\theta}\right) \right\} + \left(e^4 \text{ オーダーかつ } \lambda_{min} \text{ に依存しない項}\right)
 \end{aligned}$$

これは λ_{min} に依存しない。このことより赤外破綻は解決する。これは、ブロッホとノルドジークによって、同じ考えがすべてのオーダーに適用できることが示された⁶。

散乱断面積に対する量子電気力学的補正の最大の項、すなわち

$$-\frac{2e^2}{\pi} \left\{1 - \frac{2\theta}{\tan 2\theta}\right\} \ln \frac{m}{K_m}$$

は、このような長波長が関係しているので、古典電気力学から得られる可能性があることは興味深いことである。この他の項の効果は小さい。これまでのところ、散乱実験は、大きな項の存在を検証するには十分な精度があるが、小さな項の寄与を正確に検証するには十分な精度はない。従って、量子電気力学の自明ではない検証にはなっていない。

これと同じことが、自由電子の偏向を伴うあらゆるプロセスであてはまる。この問題を扱う最良の方法は、すべてを λ_{min} に関して計算し、最終的に λ_{min} を取り除くことによって検証できる、目的にかなった答えが得られる疑問を持つことを心掛けるとよい。

問題：クライン-仁科の式に対する放射補正 (e^2 オーダー) に必要なダイアグラムと積分を記載しなさい。この計算を可能なら実行し、ブラウンとファインマン⁷の結果と比較しなさい。

第 30 回講義

赤外破綻に対する別のアプローチ

作為的な質量を導入する代わりに、弱い光子の寄与がないと仮定する。したがって、運動量の大きさが数 $k_0 \gg \lambda$ より小さいすべての光子の寄与を前述の結果から差し引かなければならない。前述の結果は、

$$\vec{a} \left[1 + \frac{e^2}{2\pi} \left\{ 2 \ln \left(\frac{m}{\lambda_m} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\tan 2\theta} \right) \right\} + \theta \tan \theta + \frac{4}{\tan 2\theta} \int_0^\theta y \tan y \, dy \right] \quad (30-1)$$

である。

減算される項は、

$$\frac{e^2}{2\pi} \int_0^{k_0} \gamma_\mu (\vec{p}_2 - \vec{k} + m) \frac{1}{k^2 - 2p_2 \cdot k_2} \vec{a} (\vec{p}_1 - \vec{k} + m) \frac{1}{k^2 - 2p_1 \cdot k_1} \gamma_\mu \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda_{min}} \quad (30-2)$$

である。 $k_0 \ll p_1$ あるいは $k_0 \ll p_2$ とし、積分では \vec{k} と最初の 2 つの k^2 を無視する。したがって $\vec{p}_1 \gamma_\mu = 2p_\mu - \gamma_\mu \vec{p}_1$ を用いると、積分は、

$$x = -\frac{e^2}{2\pi} \frac{\vec{a}}{2} \int \left(\frac{p_{2\mu}}{p_2 \cdot k} - \frac{p_{1\mu}}{p_1 \cdot k} \right)^2 \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda_{min}} \quad (30-3)$$

と近似できる。これは、

$$x = \frac{e^2}{2\pi} \left[\left(1 - \frac{2\theta}{\tan 2\theta} \right) \left(2 \ln \frac{2k_0}{\lambda_m} - 1 \right) + \frac{4\theta}{\tan 2\theta} \left\{ \frac{1}{2\theta} \int_0^{2\theta} \frac{y}{\tan y} \, dy - 1 \right\} \right] \vec{a} \quad (30-4)$$

となる。これは式 (30-1) から差し引かれる項である。

q が小さいとき、 $\sin^2 \theta = q^2/4m^2$ を用いると式 (30-4) は、

$$x = \frac{e^2}{2\pi} \frac{2q^2}{3m^2} \left(\ln \frac{2k_0}{\lambda_{min}} - \frac{5}{6} \right) \vec{a}$$

となる。

同様に q を小さいとして、これを式 (30-1) から引くと、

$$\vec{a} \left[1 + \frac{e^2}{4\pi} \frac{4q^2}{3m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda_{min}} - \frac{3}{8} - \ln \frac{2k_0}{\lambda_{min}} + \frac{5}{6} \right) \right] \quad (30-5)$$

となる。最後の項は $\{\ln(m/2k_0) + (11/24)\}$ である。

原子内電子の効果

ポテンシャル $V = e^2/r$ と波動関数 $\phi_0 \exp(-iE_0 t) = \phi_0(x_\mu)$ を持つ水素原子を考える。波動関数は、従来の方法で規格化されているとする。電子の自己エネルギーの効果は、エネルギー単位を

$$\Delta E = e^2 \int \tilde{\phi}_0(x_2, t_2) \gamma_\mu K_+^V(2,1) \gamma_\mu \delta_+(s_{1,2}^2) \phi_0(x_1, t_1) d^3 x_1 d^3 x_2 dt_2$$

$$-\Delta m \int \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) d^3 \mathbf{x} \quad (30-6)$$

だけシフトさせる。最初の積分は図 30-1 を書き下した式である。第 2 は、以前の講義で指摘した自由粒子効果である。この積分の厳密な計算を可能にするほどに、積分核 K_+^V は完全に定められたものではない。

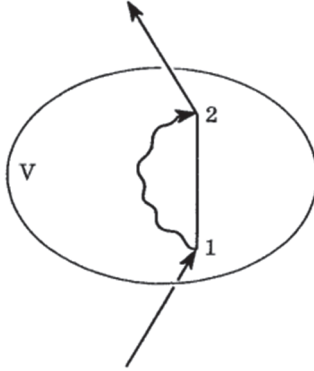


図 30-1

これは、

$$K_+^V(2,1) = \sum_{+n} \exp\{-iE_0(t_2 - t_1)\} \tilde{\phi}_n(x_2) \phi_n(x_1) \quad t_2 > t_1$$

$-t_2 < t_1$ についても同様に負のエネルギーで和をとるを使うことで近似計算ができる。光子の伝播核は、

$$\begin{aligned} \delta_+(s_{1,2}^2) &= 4\pi \int \exp\{-ik(t_2 - t_1) + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k} \quad t_2 > t_1 \\ &= 4\pi \int \exp\{+ik(t_2 - t_1) + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k} \quad t_2 < t_1 \end{aligned}$$

と展開できる。これら表現を使うことで式 (30-6) は、

$$\Delta E = \sum_{+n} \int [\alpha_\mu \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R})]_{0n} \frac{1}{E_n + K - E_0} [\alpha_\mu \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R})]_{n0} \frac{d^3\mathbf{k}}{4\pi k} \\ - \sum_{-n} \int [\alpha_\mu \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R})]_{0n} \frac{1}{|E_n| + \omega + E_0} [\alpha_\mu \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R})]_{n0} \frac{d^3\mathbf{k}}{4\pi k} - (\Delta m \text{項}) \quad (30-7)$$

この形式では、 $\tilde{\phi}$ の代わりに ϕ^* を使い、それに $\alpha_4 = 1$ 、 $\alpha_{1,2,3} = \alpha$ としている。

水素原子内の電子の運動に対する別のアプローチとして、次のようなものがある。電子をクーロンポテンシャルによって断続的に散乱される自由粒子と捉える。ここでの散乱によって、波動関数に (Rydberg/ \hbar) のオーダーの位相のずれが生じる。したがって、散乱の周期は $T = \hbar/\text{Rydberg}$ のオーダーになる。「自己相互作用」光子の運動量の下限値 k_0 をリュドベリに比べて非常に大きいとする。すると、放出された光子が電子とポテンシャルの相互作用が 2 回起こる前に再吸収される可能性が非常に高く、放出から吸収までの間に 2 回以上の散乱が起こることはほとんどないことがわかる (図 30-2 参照)。

そうすると、ポテンシャルの補正は式 (30-5) で計算された小さな q (それと異常モーメント補正) に対するものとなる。これは運動量空間において、

$$\frac{e^2}{4\pi} \frac{4q^2}{3m^2} \left(\ln \frac{m}{2k_0} + \frac{11}{24} \right) \vec{V}$$

である。通常の空間に変換するには、

$$q^2 \vec{V} = (q_4^2 - Q^2) \vec{V} \rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{V}$$

を用いる。これより補正項は、

$$-\frac{e^2}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2k_0} + \frac{11}{24} \right) \nabla^2 \vec{V} \quad (30-7')$$

となる。

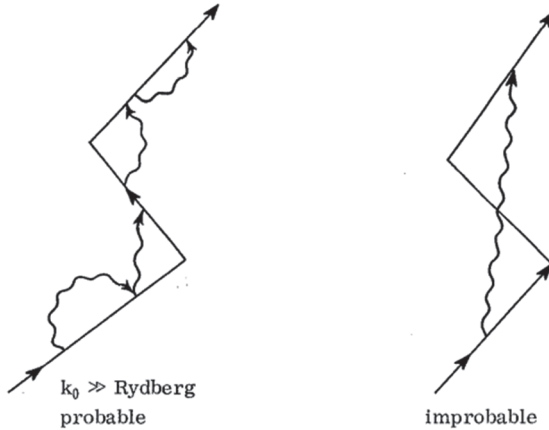


図 30-2

クーロンポテンシャル $\nabla^2 V = 4\pi Ze^2 \delta(\mathbf{R})$ において、s 状態でのみ $\phi(\mathbf{R})$ が $\mathbf{R} = 0$ で 0 と異なるため、この補正は s 状態において最も重要である。

k_0 の選択は不等式 $m \gg k_0 \gg \text{Rydberg}$ によって定まる。満足のいく値は $k_0 = 137 \text{Rydberg}$ である。このような k_0 では、 $k < k_0$ の光子の効果を含める必要がある。これは、この効果を 3 つの寄与する効果の合計に分離することによって行う。これらの効果のうち 2 つはポテンシャル V に依存しないので、自由粒子の Δm 補正で同様の項によって相殺されることがわかる。したがって、1 つの状況に対してのみ効果を計算する必要がある。すべての場合において、 k が小さいため、式 (30-7) の非相対論的近似を用いることができる。

(1) 負のエネルギー状態の寄与： m に対して k を無視すると

$$(|E_n| + k + E_0) \approx 2m$$

が得られる。 α_4 の行列要素は非常に小さいため、 α の要素のみを考慮すればよい。とすると、負の状態の和は

$$\sum_{-n} \int \frac{(\alpha_{0n}) \cdot (\alpha_{n0})}{2m} k^2 \frac{dk}{k}$$

となる。この和を $+n$ まで続けると、 v^2/c^2 オーダーの無視できる項が追加される。したがって、和はおおよそ

$$- \sum_{all\ states} \int \frac{(\alpha_{0n}) \cdot (\alpha_{n0})}{2m} k^2 \frac{dk}{k} = (\alpha \cdot \alpha)_{00} k^2 \frac{dk}{2mk} = \frac{3k_0^2}{4m}$$

となる。これは V に依存しないので、 Δm 項と同値となるので打ち消される。

(2) 縦方向の正エネルギー状態 ($\alpha_\mu \rightarrow \alpha \cdot \mathbf{k}/k$) : 演習として、

$$\alpha \cdot \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) = H \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) - \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) H$$

を示してみるとよい。そして、

$$\{(\alpha \cdot \mathbf{k}/k) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})\}_{no} = \frac{E_n - E_0}{k} \{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})\}_{no}$$

とこれらの項の寄与を正のエネルギー状態にわたって合計すると

$$\begin{aligned} & \int \left\{ 1 - \frac{(E_n - E_0)^2}{k^2} \right\} \{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})\}_{0n} \{\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})\}_{no} \frac{1}{E_n + k - E_0} \frac{d^3 \mathbf{k}}{4\pi k} \\ &= \int (E_n - E_0 + k) \{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})\}_{0n} \{\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})\}_{no} \frac{d^3 \mathbf{k}}{4\pi k^3} \\ &= \int \{H \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) - \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) H\}_{0n} \{\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})\}_{no} \frac{d^3 \mathbf{k}}{4\pi k^3} \end{aligned}$$

が得られる。 $H = p^2/2m$ (V は指数と交換可能) と書くと、

$$\int \left\{ \frac{(p+k)^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} + k \right\} \frac{d^3 \mathbf{k}}{k^3}$$

となる。この項は V に依存せず、 Δm 補正により相殺される。

(3) 横方向の正エネルギー状態: k_0 が原子の大きさに比べて大きいため、双極子近似が使える⁸。式 (30-7) の和の一般項は、

$$\int (\alpha_{tr})_{0n} (\alpha_{tr})_{n0} \frac{1}{E_n + k - E_0} \frac{d^3 \mathbf{k}}{k} \quad (30-8)$$

になる。

$$\frac{1}{E_n + k - E_0} = \frac{1}{k} - \frac{E_n - E_0}{(E_n + k - E_0)k}$$

と書くと $1/k$ の項は V に依存しない量として積分の残りの部分と分割され、 Δm 補正で相殺できる。さらに、方向を平均化することで、

$$(\alpha_{tr})_{0n}(\alpha_{tr})_{n0} = \frac{2}{3}(\boldsymbol{\alpha})_{0n} \cdot (\boldsymbol{\alpha})_{n0} = \frac{2}{3m^2}(\mathbf{p})_{0n} \cdot (\mathbf{p})_{n0}$$

となる。非相対論的近似を行うことで、式 (30-8) の積分は

$$\frac{2}{3m^2}(\mathbf{p})_{0n} \cdot (\mathbf{p})_{n0}(E_n - E_0) \ln \frac{E_n + k - E_0}{E_n - E_0}$$

となる。関係式

$$\mathbf{p}_{n0}(E_n - E_0) = (\mathbf{p}H - H\mathbf{p})_{n0} = (\nabla V)_{n0}$$

と $k_0 \gg E_n - E_0$ を用いることにより、横方向の正のエネルギー状態に関する和の 1 部は、

$$\ln k_0 \sum_n \mathbf{p}_{0n} \cdot (\nabla V)_{n0} = \frac{1}{2} \ln k_0 (\nabla^2 V)_{00}$$

となる。これは式 (30-7') の $\ln k_0$ と相殺されて最終的な補正は、

$$\frac{2e^2}{3\pi m^2} \sum_{+n} \mathbf{p}_{n0} \cdot \mathbf{p}_{0n}(E_n - E_0) \left\{ \ln \frac{M}{2(E_n - E_0)} + \frac{11}{24} \right\} + (\text{異常モーメント補正})$$

となる。この和は、観測されたラムシフトと比較するために数値的に実証された。

第 31 回講義

閉ループ過程と真空偏極

ポテンシャル散乱において、 e^2 の 1 次項である別のプロセスが考慮されていない。直接ポテンシャルが粒子を散乱させるのではなく、まず対生成が起これ、それが対消滅して光子をつくり、それが散乱させることになる。ダイアグラム I (図 31-1) はこの過程にあてはまり、ダイアグラム II は時間の順序を少し変えた類似の過程にあてはまる。これらの過程の振幅は、

$$i4\pi e^2 \sum_{\text{spin states}} (\bar{u}_2 \gamma_\mu u_1) \frac{1}{q^2} \int \left(\bar{u} \frac{1}{\vec{p} - m} \gamma_\mu \frac{1}{\vec{p} + \vec{q} - m} \bar{a} u \right) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \quad (31-1)$$

である。ここで、 u は閉ループ波動関数のスピノールの部分である。最初の括弧内は光子によって散乱される電子の振幅、 $1/q^2$ は光子の伝播因子、2 番目の括弧内は光子を生成する閉ループ過程の振幅である。この式が p で積分されて

いるのは、任意の運動量の陽電子に対する振幅が必要だからである。 u の 4 つのスピンの和では、2 つの状態がダイアグラム I の過程を取り扱い、2 つの状態がダイアグラム II の過程を取り扱う。投影演算子は必要ないので、シュプール方法を直接使って、

$$i4\pi e^2 (\bar{u}_2 \gamma_\mu u_1) \frac{1}{q^2} \int \text{Sp} \left[\frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} + \not{q} - m} \not{a} \right] \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \quad (31-2)$$

に I と II の両方を含む形式を与えることができる（したがって、通常通り、時間の順序だけが異なる過程について別々のダイアグラムをつくる必要はない）。

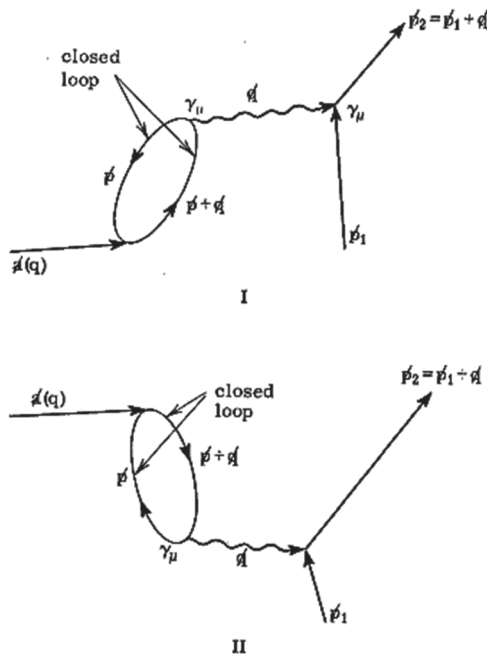


図 31-1

この積分も発散するが、以前の講義で用いた光子の収束因子は、積分が中間段階での陽電子の運動量である p 以上であるため意味がない。発散の問題を回

避するために使われてきた方法は、この積分から、 m を M に置き換えて同様の積分を差し引くことである。 M は m よりずっと大きくとられ、その結果、 p 上の積分において一種のカットオフが生じる。

これを実行すると振幅は、

$$(\tilde{u}_2 \gamma_\mu u_1) a_\mu \frac{e^2}{\pi} \left\{ -\frac{1}{3} \ln \left(\frac{M}{m} \right)^2 - \left(1 - \frac{\theta}{\tan \theta} \right) \frac{4m^2 + 2q^2}{3q^2} + \frac{1}{9} \right\} \quad (31-3)$$

であることがわかる。ここで、 $q^2 = 4m^2 \sin^2 \theta$ である。 q が小さいならば、

$$(\tilde{u}_2 \gamma_\mu u_1) a_\mu \frac{e^2}{\pi} \left\{ -\frac{1}{3} \ln \left(\frac{M}{m} \right)^2 + \frac{2q^2}{15} \right\} \quad (31-4)$$

と近似できる。 $(\tilde{u}_2 \gamma_\mu u_1) = (\tilde{u}_2 \tilde{a} u_1)$ に着目し、補正の発散部分のみを考慮すると、有効ポテンシャルは

$$\tilde{a} \left[1 + \frac{e^2}{\pi} \left\{ -\frac{1}{3} \ln \left(\frac{M}{m} \right)^2 \right\} \right] \quad (31-5)$$

となる。1 は放射補正のない理論に由来し、 e^2 項は前述のようなタイプの過程による補正である。したがって、この補正はすべてのポテンシャルの効果を小さくしたものと解釈でき、実験による電荷 e_{exp} と理論による電荷 e_{th} を導入し、その関係は、

$$e_{exp} = e_{th} + \Delta e \quad (31-6)$$

とすることができる。ここで、 $\Delta(e^2) = -(e^2/3\pi) \ln(M/m)^2$ は、第 28 講義で説明した質量補正に類似したアナロジーである。これは「電荷のくりこみ」と言われている。もう一つの項

$$\frac{2}{15} \frac{e^2}{\pi} q^2 \tilde{a}$$

は、摂動 $(2e^2/15\pi) \nabla^2 V$ を表すので、興味深い項である。この補正は、ラムシフトの 27Mc を担っている。また、式 (30-7') の項 $[\ln\{m/2(E_n - E_0)\} + 11/24]$ は $[\ln\{m/2(E_n - E_0)\} + 11/24 - 1/5]$ に置き換えられている。項 $1/5$ は「真空の偏極」に起因している。

ポテンシャルによる光の散乱

光の散乱の一つの可能な過程と、区別のつかない代替案としてダイアグラムを図 31-2 に示した。ダイアグラム右は、電子の運動を示す線の矢印の向きだけがダイアグラム左と異なる。このような向きを逆にすることは、電子を陽電子に変えることと等価である。したがって、各ポテンシャルとの結合は符号を変えることになる。このような結合が 3 つあるので、2 つ目の過程の振幅は 1 つ目のプロセスの振幅の負になる。振幅が加算されるので、正味の振幅は 0 になる。一般に、ポテンシャル（光子を含む）への奇数個の結合を含むこのタイプの閉ループ過程は、正味の振幅がゼロになる。

問題：図 31-2 の 2 つのダイアグラムのそれぞれについて積分を設定し、それらが等しく、符号が逆であることを示しなさい。

しかしながら、図 31-3 に示すような高次の過程が起こり得る。この過程の振幅は、

$$-(4\pi e^2)^2 \int \text{Sp} \left[\vec{e}_1 \frac{1}{\vec{p} - m} \vec{e}_2 \frac{1}{\vec{p} - \vec{q}_2 - m} \vec{e}_3 \frac{1}{\vec{p} - \vec{q}_2 - \vec{q}_3 - m} \vec{e}_4 \frac{1}{\vec{p} + \vec{q}_1 - m} \right] \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

に加えて、光子の順序を並べ替えた結果生じる 5 つの同様な項である。この積分は、対数発散しているように見える。しかし、6 つの選択肢をすべて考慮すると、この積分は発散する項を残さない。より複雑な閉ループ過程は収束する。

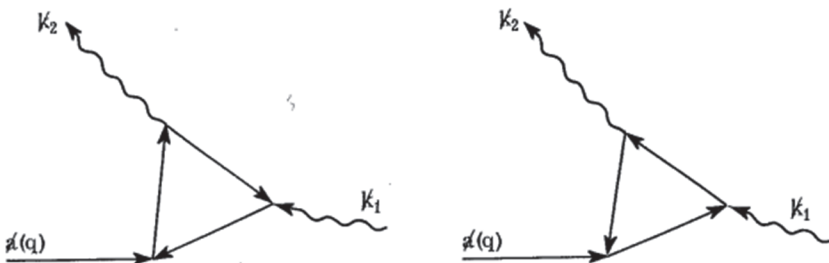


図 31-2

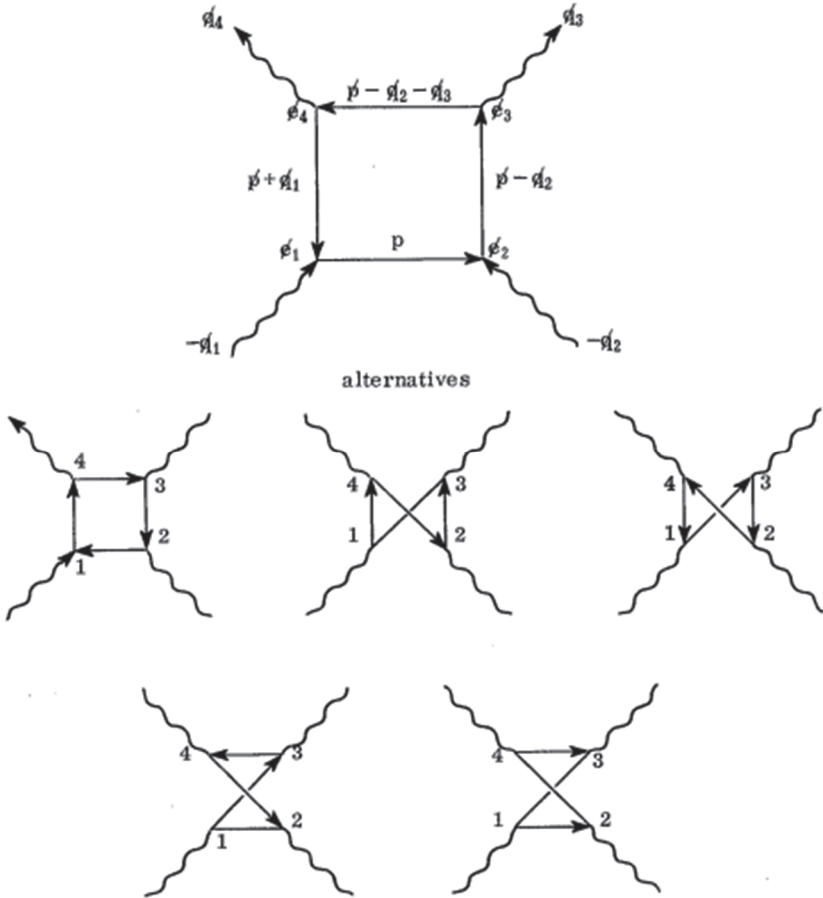


図 31-3

パウリ原理とディラック方程式

第 24 回講義では、あるポテンシャルの影響下で真空が真空のままである確率を計算した。このポテンシャルは、時刻 t_1 と t_2 の間に対生成したり、対消滅させたりすること（閉ループ過程）ができる。1 つの対の生成と消滅の振幅（最初にゼロとはならない項）は、

$$L \sim \iint \text{Sp}[K_+(1,2)\bar{a}(2)K_+(2,1)\bar{a}(1)] d\tau_1 d\tau_2$$

である。2 つの対の生成と消滅の振幅は各々 L 因子であるが、すべての $d\tau_1$ と $d\tau_2$ を積分するときにそれぞれを 2 度以上カウントしないように、 $L^2/2$ とする。同様に、3 つの対の振幅は $L^3/3!$ となる。真空が真空であり続けるための全振幅は、

$$c_v = 1 - L + L^2/2! - L^3/3! + \dots = e^{-L} \quad (31-7)$$

となり、ここで 1 は真空であり続けるための振幅で何も起こらない状態を示す。奇数対の振幅に負号が付いていることは、パウリ原理の観点から次のことが根拠となっている。 $t < t_1$ のダイアグラムが図 31-4 であるとする。しかしながら、これを完成させるには 2 通りの事象で起こる (図 31-5 参照)。1 つ目の方法は、2 つの電子の交換によって得られると考えることができ、パウリ原理に従うと、2 つ目の振幅は 1 つ目の振幅から減じなくてはならない。



図 31-4

しかし、2 つ目の過程は 1 ループの過程であるのに対し、1 つ目の過程は 2 ループの過程なので、奇数ループの振幅を差し引かなければならないと結論づけられる。真空が真空のままである確率を

$$P_{vac-vac} = |c_v|^2 = \exp(-2 \times L \text{ の実部})$$

とする。L の実数部 (R.P. of L) は正であることが示される。明らかに、級数の項の符号を入れ替えられるため、この確率は 1 より大きくなることはない。

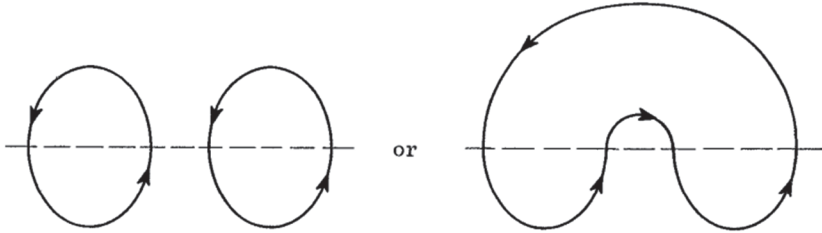


図 31-5

では、何故 e^{-L} の形でなければならないかという疑問が生じる。この問いに関しては、2つの議論がある。1つは実部の符号に関する議論で、これは K_+ とディラック方程式の性質を問うたものである。もう1つは、パウリの原理に関係したものである。これゆえに、電子がフェルミ・ディラック統計に従わなければ、ディラック方程式のこれまでの解釈とは矛盾してしまう。したがって、相対論的なディラック方程式と排他原理との間に、何らかの関係があると推察される。排他原理の必要性については、パウリが精緻な証明をしているが、ここでの議論で、このことがさらにもっともらしくなる。

この排他原理とディラック方程式との関係を問うことはたいへんに興味深い。ここでは、閉ループを伴わない別の論証を試みる。電子は互いに独立で、複数の電子に対する波動関数は（相互作用を無視しても）個々の波動関数の単なる積であると仮定することが矛盾していることを証明することにする。何故なら、これを仮定すると、

$$\begin{aligned} \{\text{真空が真空のままである確率}\} &= P_v \\ \{1 \text{ つの対をつくる真空の確率}\} &= P_v \sum_{\text{all pairs}} |K_{1 \text{ pair}}|^2 \\ \{2 \text{ つの対をつくる真空の確率}\} &= P_v \sum_{\text{all pairs}} |K_{1 \text{ pair}}|^2 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

となる。さて、これらの確率の和は、真空が任意の事象になる確率なので、1とならなければならない。したがって、

$$1 = P_v \left\{ 1 + \left(1 \text{ 対の確率} \right) + \left(2 \text{ 対の確率} \right) + \dots \right\} \quad (31-8)$$

電子が a から b に向かい、それ以外には何も起こらない確率は $P_v |K_+(b, a)|^2$ である。

電子が a から b に向かい、1 対の対が生成される確率は $P_v |K_+(b, a)|^2 |K(1 \text{ pair})|^2$ であり、電子が a から b に向かい、2 対の対が生成される確率は $P_v |K_+(b, a)|^2 |K(2 \text{ pair})|^2$ である。

したがって、電子が a から b に向かい、任意の数の対が生成される確率は、

$$P_v |K_+(b, a)|^2 \{ 1 + |K(1 \text{ pair})|^2 + |K(2 \text{ pair})|^2 + \dots \} = |K_+(b, a)|^2 \quad (31-9)$$

となる。さて、電子はどこかに向かわなくてはならないので、

$$\int |K_+(b, a)|^2 db = 1$$

は保たれる。しかしながら、ディラック積分核の性質、

$$\int |K_+(b, a)|^2 db > 1 \quad (31-10)$$

と矛盾が生じる。この矛盾は、電子はフェルミ - ディラック統計に従うことから独立ではないと仮定することで解消される。このような状況では、対の電子が b の電子と同じ状態であることは認められないため、オリジナルな電子と対となる電子は独立でも、

$$\left\{ a \text{ から } b \text{ への電子と } 1 \text{ の対が生成される確率} \right\} < |K_+(b, a)|^2 |K(1 \text{ pair})|^2 \quad (31-11)$$

でもない。クライン-ゴールドン方程式の積分核では、式 (31-10) の不等号の符号が逆になっていることがわかる。したがって、スピン 0 の粒子に対しては、フェルミ - ディラック統計も独立粒子も成り立たない。波動関数が対称である場合 (電荷を反転して加算する、アインシュタイン - ボーズ統計)、不等式 (31-11) も反転する。波動関数を対称とすると (電荷を逆にして振幅を加えるとボーズ - アインシュタイン統計となる)、不等式 (31-11) も逆になる。対称統計では、ある状態 (例えば 6) に粒子が存在すると、同じ状態で別の粒子が生成される可能性が高まる。つまり、クライン-ゴールドン方程式はボーズ統計学を必要

としている。これらの議論を発展させて、 $\int |K_+(b, a)|^2 db$ と 1 の違いが数量的に正確に排他律によって埋め合わされていることを示すのは興味深いことである。このような基本的な関係には、明確で簡単な説明が必要となる。

訳者あとがき

この小冊子「ファインマン講義 量子電磁力学(1)～(3)」は、R.P. Feynman “Quantum Electrodynamics: Lecture Note and Reprint Volume” (W. A. Benjamin, Inc., 1961) の全訳である。“Quantum Electrodynamics” は、Benjamin - Frontiers in Physics シリーズ (講義ノート) の一冊として刊行された。このシリーズには、D. Pines “The many-body problem”、G.F. Chew “S-matrix theory of strong interactions” などもあり、このファインマン本も含め、当時の物理専攻の大学院生にとって重要な存在であった。

リチャード・ファインマン (Richard Phillip Feynman, 1918 年 5 月 11 日～1988 年 2 月 15 日) は、朝永振一郎 (1906 年 3 月 31 日～1979 年 7 月 8 日)、ジュリアン・シュウィンガー (Julian Seymour Schwinger, 1918 年 2 月 12 日～1994 年 7 月 16 日) と共に「量子電磁力学分野での基礎的研究」で 1965 年度ノーベル物理学賞を受賞した理論物理学者である。現在 (2022 年 7 月) までにノーベル物理学賞受賞者は 218 名 (ジョン・バーディーン (John Bardeen, 1908～1991) は 2 度 (1956 年度と 1972 年度) 受賞しているので、延べでは 219 名) もいる。これら受賞者の中でもファインマンを特にポピュラーな存在としたのは『ファインマン物理学 I～V』(岩波書店、1967～1979) の刊行であろう。

原本は “The Feynman Lectures on Physics Vol. I, II, III (Addison-Wesley Publishing Company, 1965)” で、これは 12 以上の言語に翻訳されており、英語版だけでも 150 万部以上印刷され、そのユニークさが広く知られた (この本の内容を深く理解したいがために物理学科に入学した学生が少なからずいたという)。この著は、ファインマンが、1961 年 9 月から 1963 年 5 月までの 2 年間、カリフォルニア工科大学 (Cal Tech、ファインマンは 1951 年から Cal

Tech の教授) において、1、2 年生を対象とした講義「物理学序論」を基にして制作された。1 年目に力学、光、熱、波動、2 年目に電磁気学、電磁波、物性が講義された。原本Ⅲ (邦訳Ⅴ巻) は、2 年目の後半の 4 分の 1 (計 12 回) を量子力学の序論に充てたが不十分であったため講義を 7 回追加し、これらを基にしている。講義は、週 2 回、180 名ほどの学生を対象に行われた。これら講義の後、15~20 名ほどの小グループに分かれて、それぞれ助手の指導のもと演習授業があった。ファインマンは、学生からの反応が悪く、講義がうまくいったかどうかかわからないと「序」に述べている。ファインマンはこの講義を 1 回のみとの条件で引き受け、講義ごとの録音テープを活字に起こされた後、編集されて本となった。このため、ファインマンは著者となっているが、原稿のほとんどは共著となっている同僚のロバート・レイトン (Robert B. Leighton、1919~1997) とマシュー・サンズ (Matthew L. Sands、1919~2014) の筆による。

ファインマンの自由に生きた人生を語った『ご冗談でしょう、ファインマンさん』(大貫昌子訳、岩波書店、1986、原著は“Surely You're Joking, Mr. Feynman! (W. W. Norton & Company、1985)”は、ベストセラーとなった。訳本はファインマン著となっている(原著はレイトンと共著となっている)が、レイトンがファインマンとの会話を録音して題材を選び、原稿に起こし、編集した。すなわち、このエッセイの自由でのびのびとした文はすべてレイトンの筆による。

また、ファインマン、モリニーゴ、ワーグナー (和田純夫訳)『ファインマン講義 重力の理論』(岩波書店、1999) は、ファインマンが、1962 年~1963 年、カルテクで行った大学院生向けの講義を、助手のモリニーゴ (Fernando B. Morinigo) とワーグナー (William G. Wagner) がまとめて編集した本である。ファインマンは、1 年間週 1 回計 27 回の講義を行った (この本は 16 回分の講義をまとめた)。

A. ヘイ、R. アレン編 (原康夫、中山健、松田和典訳)『ファインマン計算機科学』(岩波書店、1999) は、1983 年、Cal Tech でのファインマンの講義を、チームを組んで録音テープを活字に起こし、編集された本である。

ファインマン (西川恭治監訳、田中新、佐藤仁訳)『ファインマン統計力学』(シュブリンガー・ジャパン、2009) は、Hughes Research Laboratories の後援で行われた講義を、菊池良一と H.A. Feiveson が取ったノートを Jacob Shaham が編集した本である。

ファインマンには、次の本もある。

『困ります、ファインマンさん』(大貫昌子訳、岩波書店、1988) は “What do you care, what other people think? Mr. Feynman goes to Washington (W. W. Norton & Company、1988)” の翻訳である。これは、『ご冗談でしょう、ファインマンさん』の続編として、ファインマンが亡くなった直後に出版された。これも、訳本はファインマン著となっている (原著はレイトンと共著となっている) が、レイトンの筆による。

『物理法則はいかにして発見されたか』(江沢洋訳、岩波書店、2001) は、コーネル大学での講演 “The Character of the Physical Law(1964)” とノーベル受賞講演 “The Development of the Space-Time View of Quantum electrodynamics(1965)” の翻訳である。現在入手しやすい岩波現代文庫版は、1968 年にダイヤモンド社刊行の覆刻版である。

『科学は不確かだ!』(岩波書店、1998) はワシントン州立大学での 3 日間連続講演 “The meaning of it all” の訳である。

『光と物質のふしぎな理論』(釜江常好、大貫昌子訳、岩波書店、1987) は、カリフォルニア大学ロサンゼルス校で行った講演 “QED: The Strange Theory of Light and Matter(1983)” のテープをレイトンが活字に起こし、編集した本である。

ファインマンが論文以外は執筆しないことは知られていたが、エッセイばかりか、教科書から専門書であっても、友人あるいは対象分野の専門家に講義あるいは講演のテープを活字に起こしてもらい、編集してもらったものがすべてであったことを再認識した (ファインマンは、論文執筆においても、書くことが不得手であるため大変苦労したようである。大学院入学の際、数学と物理学がこれほどまでできた受験生は初めてと言われ、同時に、歴史と国語がこれだけ低得点でも合格した受験生も初めだったとも言われた)。

本著“Quantum Electrodynamics”は、序文((1)に掲載)にあるように、1953年に行った講義をアルバート・ヒップス(Albert R. Hibbs, 1924~2003)が記録したノートに基づいて編集された。ヒップスは、カルテクのジェット推進研究所の所員となった後、学位取得の際にファインマンの指導を受けている(彼は宇宙飛行士の資格を得て、アポロ計画の一員となっていた)。ヒップスは、ファインマンの講義を基にした『量子力学と経路積分』(みすず書房、2017、原著は“Quantum Mechanics and Path Integrals (McGraw-Hill Inc., 1965)”)のファインマンと共著で出版したことも知られている。

“Quantum Electrodynamics”の基をなす講義は31回に分けて行われた。これら31回の講義ノートの長さ(原稿の分量)は等分ではない。おそらく、話し好きのファインマンのこと、雑談も多かったのではないだろうか。ヒップスは、『ご冗談でしょう、ファインマンさん』の「はじめに」において、ファインマンの講義は、物理学を学ぶ喜びが学生に伝わってきて、そこに幸せを感じたと学生時代の思い出を語っている。まさに、そんな講義なのだろう、それを文章で表現することは困難であり、このため回ごとに分量が異なっているのだと推測できる。このことは、ファインマン自身、「僕は教えることを離れては、生きていけそうもない」と語っていることから講義に対する情熱は高いことがわかる。これは、研究には必ず行き詰まりがあることから生じた言葉であろう。

“Quantum Electrodynamics”の内容は、特殊相対論と量子力学を学んでいるなら、ファインマンの論理を辿ることは可能である。しかしながら、実験物理専攻の大学院生を対象としたのだから単位系は、係数が複雑になったとしても計算で得た散乱断面積などを実験値と比較できるように、自然単位系ではなく国際単位系(SI単位)を採用した方がよかったのではないだろうか。また、この講義ノートは、ファインマンのもつ洞察力と明晰な思考によって構成されているのは当然であるが、必ずしも理解しやすいわけではなく、そのうえミスも多くあり、編集が十分とは言えない。機会があれば、さらに手を加え、ファインマンQEDの面白さを伝えたいと思う。

注

- 1 特別な場合、例えば、

$$(\tilde{u}_4 \vec{q} u_2) = (\tilde{u}_4 (\vec{p}_2 - \vec{p}_4) u_2) = (\tilde{u}_4 \vec{p}_2 u_2) - (\tilde{u}_4 \vec{p}_4 u_2) = m(\tilde{u}_4 u_2) - m(\tilde{u}_4 u_2) = 0$$
 と直ちに示すことが容易である。
- 2 変換積分での $(\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{Q}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 \times \boldsymbol{Q}) \exp(-i\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{x})$ は、 $-(\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\nabla}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 \times \boldsymbol{\nabla}) \exp(-i\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{x})$ と同じであることに注意。 $\boldsymbol{\nabla}$ は勾配演算子である。この工夫により、部分積分が可能となり、結果に至る過程が大幅に簡略化される。したがって、 $1/Q^2$ の変換は $1/r$ であるから、この結合は $-(\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\nabla}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 \times \boldsymbol{\nabla})(1/r)$ となり、これは相互作用する磁気双極子の古典的エネルギーである。
- 3 この節は論文 (R. P. Feynman, Phys. Rev., Phys. Rev., 76 (1949) 769) に依拠している。
- 4 原文の解答は、 $2\pi i \{-2(L + K^2)^{-1/2}\}^{-1}$ となっている。
- 5 R. P. Feynman, Phys. Rev., 76 (1949) 769.
- 6 F. Bloch and A. Nordsieck “Note on the radiation field of the electron”, Phys. Rev., 52 (1937) 54.
- 7 L. Brown and R.P. Feynman, Phys. Rev., 85 (1952) 231.
- 8 H. Bathe, Phys. Rev., 73 (1947) 339.