

ファインマン講義 量子電磁力学 (2)

Feynman Lectures on Quantum Electrodynamics (2)¹

訳および解説 並木 雅俊

Masatoshi Namiki

ディラック方程式の自由粒子解

第 13 回講義

ディラック方程式

$$\gamma_\mu(i\nabla_\mu - eA_\mu)\Psi = m\Psi$$

の自由粒子解を導出するには、 γ_μ を含む形式を使うことを薦める。第 10 回講義で定義した $\vec{a} = \gamma_\mu a_\mu$ を使う²と、

$$\vec{a} = \gamma_\mu A_\mu = \gamma_t A_t - \gamma_x A_x - \gamma_y A_y - \gamma_z A_z$$

$$\vec{\nabla} = \gamma_\mu \nabla_\mu = \gamma_t \nabla_t - \gamma_x \nabla_x - \gamma_y \nabla_y - \gamma_z \nabla_z$$

となるので、ディラック方程式は

$$(i\vec{\nabla} - e\vec{A})\Psi = m\Psi \quad (13-1)$$

と書き直すことができる (量 $\vec{a} = \gamma_\mu a_\mu$ はローレンツ変換に対して不変であることを思い出していただきたい)。

確率密度と確率密度流を 4 次元で表現する必要がある。特別な表現では、確率密度と確率密度流は、

$$\rho = \Psi^* \Psi, \quad j = \Psi^* \alpha \Psi$$

で与えられる。 Ψ の相対論的なエルミート共役^(注)を

$$\bar{\Psi} = \Psi^* \beta \quad (13-2)$$

と標準的表現で定義すると、確率密度と確率密度流は

$$\rho = \bar{\Psi} \beta \Psi, \quad j_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi$$

と書くことができる。これを確認するには、 $\bar{\Psi}$ を $\Psi^*\beta$ に置き換え、 $\beta^2 = 1$ と $\beta\gamma_\mu = \alpha_\mu$ に着目するとよい。

注意： Ψ が、4元列ベクトル

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$$

であるとする。 Ψ のエルミート共役（随伴ともいう）は、標準的な表現では、4元行ベクトル

$$(\Psi_1^* \quad \Psi_2^* \quad -\Psi_3^* \quad -\Psi_4^*)$$

となる。 β の乗算では、 Ψ^* を列ベクトルから行ベクトルに変えることに加え、第3成分と第4成分の符号を変えている。

練習問題：(1) 次の式は、 Ψ のエルミート共役を満たすことを示しなさい。

$$\bar{\Psi}(-i\vec{\nabla} - e\vec{A}) = m\bar{\Psi} \quad (13-3)$$

(2) 式(13-1)と式(13-3)を使って、確率密度の保存 $\nabla_\mu j_\mu = 0$ を示しなさい。

一般的に、演算子 N のエルミート共役を \tilde{N} と記し、 \tilde{N} は N と同一であるが、現れるすべての γ の順序を逆にし、また虚数 i があれば (γ に含まれるものではない)、それを $-i$ に置き換える。例えば、 $N = \gamma_x \gamma_y$ であるなら、 $\tilde{N} = \gamma_y \gamma_x = -N$ となる。また、 $N = i\gamma_5 = i\gamma_x \gamma_y \gamma_z \gamma_t$ であるなら、 $\tilde{N} = -i\gamma_t \gamma_z \gamma_y \gamma_x = -i\gamma_5$ となる。非相対論的量子力学では、エルミート演算子の特性の他に、次の便利な特性がある。

$$(\tilde{\Psi}_2 N \Psi_1)^* = (\tilde{\Psi}_1 \tilde{N} \Psi_2) \quad (13-4)$$

自由粒子の場合は、ポテンシャルがないので、 $\vec{A} = 0$ で、ディラック方程式は、

$$i\vec{\nabla}\Psi = m\Psi \quad (13-5)$$

となる。これを解くために、

$$\Psi = ue^{-ip \cdot x} = ue^{-ip_\nu x_\nu} \quad (13-6)$$

が解と仮定してみる。 Ψ は4つの成分をもった波動関数で、この仮定した解は、4成分の各々が次の形であることを意味している。

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x}$$

したがって、 u_1, u_2, u_3, u_4 は列ベクトルの成分で、 u をディラック・スピノールという。仮定した解がディラック方程式を満たすには、 u と p にどのような制限を加えればよいか、という新たな問題がある。 Ψ の各成分における演算 ∇_μ は、各成分に $-ip_\mu$ を乗じることを意味するので、 Ψ におけるこの演算の結果、

$$\nabla_\mu \Psi = \nabla_\mu u e^{-ip_\mu x_\mu} = -ip_\mu u e^{-ip_\mu x_\mu} = -ip_\mu \Psi$$

が得られる。これにより、式 (13-5) は、

$$i\gamma_\mu (-ip_\mu) \Psi = \gamma_\mu p_\mu \Psi = \vec{p} \Psi = m \Psi \quad (13-7)$$

となる。このため、仮定した解が $\vec{p}u = mu$ を満たさなくてはならない。ここでは、記述を簡単にするために、粒子が x - y 平面上を移動するとする、すなわち、

$$p_1 = p_x, \quad p_2 = p_y, \quad p_3 = 0, \quad p_4 = E$$

とする。この条件では、 $\vec{p} = \gamma_t E - \gamma_y p_y - \gamma_x p_x$ 、となる。標準的な表現では、

$$\gamma_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{x,y} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{x,y} \\ -\sigma_{x,y} & 0 \end{pmatrix}$$

なので、 $\vec{p} - m$ は、

$$\begin{pmatrix} E - m & 0 & 0 & -p_x + ip_y \\ 0 & E - m & -(p_x + ip_y) & 0 \\ 0 & p_x - ip_y & -(E + m) & 0 \\ p_x + ip_y & 0 & 0 & -(E + m) \end{pmatrix} \quad (13-8)$$

となる。これにより、式 (13-7) の成分ごとの式は、

$$(E - m)u_1 - (p_x - ip_y)u_4 = 0 \quad (13-9a)$$

$$(E - m)u_2 - (p_x + ip_y)u_3 = 0 \quad (13-9b)$$

$$(p_x - ip_y)u_2 - (E + m)u_3 = 0 \quad (13-9c)$$

$$(p_x + ip_y)u_1 - (E + m)u_4 = 0 \quad (13-9d)$$

となる。比 u_1/u_4 は式 (13-9a) と式 (13-9d) から求められる。式 (13-6) が解となるためには、この2つの値が一致する必要がある。すなわち、

$$\frac{u_1}{u_4} = \frac{p_x - ip_y}{E - m} = \frac{E + m}{p_x + ip_y}$$

あるいは

$$p_x^2 + p_y^2 + m^2 = E^2 \quad (13-10)$$

である。これは意外にも知られていない条件である。これは、全エネルギーに関する相対論を満たすように p_v を選ばなくてはならないことを意味している。

同様に、式 (13-9b) と式 (13-9c) を使って、比 u_2/u_3 について解くと、

$$\frac{u_2}{u_3} = \frac{p_x + ip_y}{E - m} = \frac{E + m}{p_x - ip_y}$$

が得られ、これも条件である式 (13-10) につながる。式 (13-7) から直接始めると、エレガントな方法で同じ条件を得ることができる。そして、この式に \vec{p} を乗じることで

$$\vec{p}(\vec{p}u) = \vec{p}(mu) = m(\vec{p}u) = m^2u$$

が得られる。式 (10-9) を使って、

$$\vec{p}\vec{p} = p \cdot p = E^2 - p_x^2 - p_y^2$$

となり、

$$E^2 - p_x^2 - p_y^2 = m^2 \quad \text{あるいは} \quad u = 0$$

と条件が得られる。前者は、式 (13-10) と同じ条件が得られ、後者はトリビアルな解（波動関数がない）である。

明らかに、自由粒子のディラック方程式は 2 つの線形で独立解が存在する。これは、仮定した解である式 (13-6) をディラック方程式に代入すると、解 u の対 u_1 と u_4 、それと、 u_2 と u_3 のみ条件が付与されることによる。独立解を選ぶには、それぞれがゼロとなる 2 つの成分を持つようにすることが便利である。したがって、解 u の 2 つの解は、

$$\begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ p_+ \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ p_- \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13-11)$$

とすることができる。ここで、

$$\begin{aligned} F &= E + m \\ p_+ &= p_x + ip_y \\ p_- &= p_x - ip_y \end{aligned} \quad (13-12)$$

とした。ただし、これらの解は規格化されてはいない。

運動している電子のスピン定義

2つの線形的に独立した解は何を意味するのか。波動関数を一意的に決定する、まだ指定可能な物理量があるはずである。例えば、粒子が静止している座標系では、2つの可能なスピンの向きがあることが知られている。固有値方程式 $\vec{p}u = mu$ に2つの解があるということは、数学的には \vec{p} と交換可能な演算子が存在することを意味する。そこで、この演算子を見つけなくてはならない。 γ_5 は \vec{p} と反交換関係、すなわち $\gamma_5\vec{p} = -\vec{p}\gamma_5$ となっていることに気づく。また、任意の演算子 \vec{W} において、 $\mathbf{W} \cdot \mathbf{p} = 0$ であるなら、

$$\vec{W}\vec{p} = -\vec{p}\vec{W} + 2\mathbf{W} \cdot \mathbf{p} \quad (10-9)$$

となって、 \vec{W} は \vec{p} と反交換関係にあることがわかる。この2つの反交換関係の組み合わせをもとに、 $\gamma_5\vec{W}$ は \vec{p} との交換演算子を考え、

$$(\gamma_5\vec{W})\vec{p} = -\gamma_5\vec{p}\vec{W} = \vec{p}(\gamma_5\vec{W})$$

を見つけることができる。そこで、演算子 $(i\gamma_5\vec{W})$ の固有値を求めることにする（以下、固有値を実数にするために i を付ける）。これらの固有値を s とすると、

$$(i\gamma_5\vec{W})u = su \quad (13-13)$$

と書ける。 s の可能な値を求めるために、式(13-13)に $i\gamma_5\vec{W}$ を乗じると、

$$(i\gamma_5\vec{W})(i\gamma_5\vec{W})u = -\gamma_5\vec{W}\gamma_5\vec{W}u = -\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}u = i\gamma_5\vec{W}su = s^2u$$

あるいは、

$$-\mathbf{W} \cdot \mathbf{W} = s^2$$

と計算できる。 $\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}$ を -1 とすると、演算子 $i\gamma_5\vec{W}$ の固有値は ± 1 となる。 $\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}$ を選んだ意味は次である。粒子が静止している系では、 $p_x = p_y = p_z = 0$ それと $p_4 = E$ となる。それから、

$$0 = p \cdot W = p_4 W_4 \quad \text{あるいは} \quad W_4 = 0$$

である。すなわち、 $W \cdot W = -\mathbf{W} \cdot \mathbf{W} = -1$ あるいは $W \cdot W = 1$ である。これは、粒子が静止している座標系において、 W が長さの単位を持った通常のベクトル（第 4 成分がゼロ）であることを示している。

粒子が x - y 平面内を移動するとき、 \vec{W} を γ_z にすると、 $i\gamma_5 \vec{W} u$ の演算子式は、

$$i\gamma_5 \gamma_z u = su$$

となる。第 10 回講義で導いた関係を用いると、静止した粒子の場合、

$$i\gamma_5 \gamma_z u = i\gamma_x \gamma_y \gamma_t u = i\gamma_x \gamma_y u = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} u = su$$

となる（静止粒子の $\gamma_t u = u$ で表される）。この選択により、 \vec{W} は σ_z 演算子で表示され、スピンの関係が明確になった。 $\vec{p}u = mu$ と $i\gamma_5 \vec{W}u = su$ を共に満たすように u を定義して、 u を完全に規定する。運動量 p_μ で運動する粒子を表し、 W_μ 軸に沿った（粒子と共に運動する座標系での）スピンの正 ($s = +1$) または負 ($s = -1$) であることを示す。

練習問題：最初の波動関数である式 (13-11) が $s = +1$ に対する解であり、2 番目の波動関数の解が $s = -1$ に対応することを示しなさい。

自由に運動している電子の波動関数を求めるもう一つの方法は、波動関数を式 (10-12) のように等価変換することである。電子が最初に静止しており、 z 方向にスピンの上向きまたは下向きであるとする、ある方向 \mathbf{k} 方向に速度 v で運動する電子のスピンールは、

$$u(\mathbf{k}) = Su, \quad u = \sqrt{2m} u_0$$

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で表される。（規格化は、式 (13-14) を参照のこと）。

S は、式 (10-11) を使って

$$S = \exp \left\{ \left(\frac{u}{2} \right) \gamma_t \gamma_k \right\}$$

$$\cosh u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

それから、

$$\exp \left\{ + \left(\frac{u}{2} \right) \gamma_t \gamma_k \right\} = \cosh \frac{u}{2} + \gamma_t \gamma_k \sinh \frac{u}{2}$$

それと

$$\sqrt{2m} \cosh \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}} + m = \sqrt{E+m}$$

$$\sqrt{2m} \sinh \frac{u}{2} = \sqrt{E-m}$$

となる。これらより、

$$u_{(k)} = \frac{1}{\sqrt{F}} \{ \sqrt{E+m} + \gamma_t \gamma_k \sqrt{E-m} \} u_0$$

が得られる。 $F = (E+m)$, $\boldsymbol{\alpha} = \gamma_t \boldsymbol{\gamma}$ と置き換え、 $p_k = \sqrt{E^2 - m^2}$ を記すことにより

$$u_{(k)} = \frac{1}{\sqrt{F}} (E + m + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) u_0$$

となる。 \mathbf{p} が x - y 平面上にある場合、これは式 (13-11) の結果が得られることが直ぐにわかる。 $1/\sqrt{F}$ は式 (13-11) の規格化係数である。

静止電子 $\gamma_t u_0 = u_0$, $u_{(k)}$ の場合、 $u_{(k)}$ は、

$$u_{(k)} = \frac{1}{\sqrt{F}} (E \gamma_t - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) u_0$$

あるいは、

$$u_{(k)} = \frac{1}{\sqrt{F}} (\vec{p} + m) u_0$$

のどちらで表してもよいということではない。このことは、自由粒子のディラック方程式

$$(\vec{p} - m)u_k = 0 \quad (13-7)$$

の解が

$$(\vec{p} + m)(\vec{p} - m) = p^2 - m^2 = 0, \quad p^2 = m^2$$

となることから明らかである。

波動関数の規格化

非相対論的量子力学では、単位体積あたり粒子が存在する確率を 1 とするよう平面波を規格化、つまり、 $\Psi^*\Psi = 1$ とする。相対論的な平面波の類似を考えると規格化は、

$$\Psi^*\Psi = u^*u = \tilde{u}\gamma_t u = 1$$

となるだろう。ただし、 $\tilde{u} = u^*\gamma_t$ とした。しかし、 $\Psi^*\Psi$ は 4 元ベクトルの第 4 成分と類似の変換となる (4 元電流ベクトルの第 4 成分である) ため、この規格化は不変ではない。 u^*u を適当な 4 元ベクトルの第 4 成分とすることで、相対論的に不変な規格化を行うことができる。例えば、 E は 4 元運動量ベクトル p_μ の第 4 成分なので、波動関数を

$$\tilde{u}\gamma_t u = 2E$$

で規格化することができる。この式の比例定数 2 は、後の計算式での便宜のために選んだ。 $s = +1$ の状態での $\tilde{u}\gamma_t u$ を計算すると、

$$\begin{aligned} (\tilde{u}\gamma_t u) &= (F \quad 0 \quad 0 \quad -p_-) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ p_+ \end{pmatrix} \times C_1^2 \\ &= (F \quad 0 \quad 0 \quad -p_-) \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ -p_+ \end{pmatrix} \times C_1^2 \\ &= (F^2 + p_+ p_-) C_1^2 = 2E(E + m) \end{aligned}$$

となる。 C_1 は、式 (13-11) の波動関数を掛け合わせる規格化因子である。 $(\tilde{u}\gamma_t u)$ が $2E$ になるためには、規格化係数を $(E+m)^{-1/2} = (F)^{-1/2}$ とする必要がある。 $(\tilde{u}u)$ に関しては、この規格化条件は

$$(\tilde{u}u) = (F \quad 0 \quad 0 \quad -p_-) \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ p_+ \end{pmatrix} \times \frac{1}{F} = (F^2 - p_- p_+) \frac{1}{F} = \frac{2m^2 + 2mE}{E+m} = 2m$$

となる。 $s = -1$ の状態でも同様の結果が得られる。したがって、規格化条件を

$$(\tilde{u}u) = 2m \tag{13-14}$$

とすることができる。同様にして、次のようなことを示すことができる。

$$(\tilde{u}\gamma_x u) = 2p_x$$

$$(\tilde{u}\gamma_y u) = 2p_y$$

$$(\tilde{u}\gamma_z u) = 0$$

表 13-1 は、計算に便利のため、さまざまな始状態と終状態の間のすべての γ の行列要素を示した。

表 13-1 x - y 平面上を運動する粒子の行列要素

行列 N	$(\tilde{u}Nu)$ $s = +1$	$\sqrt{F_2F_1}(\tilde{u}_2Nu_1)$ $s_1 = +1$ $s_2 = +1$	$\sqrt{F_2F_1}(\tilde{u}_2Nu_1)$ $s_1 = +1$ $s_2 = -1$
1	$2m$	$F_2F_1 - p_{1+}p_{2-}$	0
γ_x	$2p_x$	$F_2p_{1+} + p_{2-}F_1$	0
γ_y	$2p_y$	$-iF_2p_{1+} + ip_{2-}F_1$	0
γ_z	0	0	$-p_{1+}F_2 + p_{2+}F_1$
γ_t	$2E$	$F_2F_1 + p_{1+}p_{2-}$	0
$\gamma_y\gamma_z$	0	0	$-iF_2F_1 + ip_{1+}p_{2+}$
$\gamma_z\gamma_x$	0	0	$F_2F_1 + p_{1+}p_{2+}$
$\gamma_x\gamma_y$	$-2iE$	$-iF_2F_1 - ip_{1+}p_{2-}$	0
$\gamma_t\gamma_x$	$2ip_y$	$F_2p_{1+} - p_{2-}F_1$	0
$\gamma_t\gamma_y$	$-2ip_x$	$-iF_2p_{1+} - ip_{2-}F_1$	0
$\gamma_t\gamma_z$	0	0	$-p_{1+}F_2 - p_{2+}F_1$
$\gamma_5\gamma_x = \gamma_t\gamma_y\gamma_z$	0	0	$-iF_2F_1 - ip_{1+}p_{2+}$
$\gamma_5\gamma_y = \gamma_t\gamma_z\gamma_x$	0	0	$F_2F_1 - p_{1+}p_{2+}$
$\gamma_5\gamma_z = \gamma_t\gamma_x\gamma_y$	$-2im$	$-iF_2F_1 + ip_{1+}p_{2-}$	0
$\gamma_5\gamma_t = \gamma_x\gamma_y\gamma_z$	0	0	$iF_2p_{1+} + iF_1p_{2+}$
$\gamma_5 = \gamma_x\gamma_y\gamma_z\gamma_t$	0	0	$iF_2p_{1+} - iF_1p_{2+}$

$\sqrt{F_2F_1}(\tilde{u}_2Nu_1)$ $s_1 = -1$ $s_2 = -1$ は、3 列目 ($s_1=+1, s_2=+1$) の複素共役である。

$\sqrt{F_2F_1}(\tilde{u}_2Nu_1)$ $s_1 = +1$ $s_2 = -1$ は、4 列目 ($s_1=+1, s_2=-1$) の複素共役である。

注 : $p_{2+} = p_{2x} + ip_{2y} = p_2 \exp(i\theta_2)$, $p_{2-} = p_{2x} - ip_{2y} = p_2 \exp(-i\theta_2)$,

$$F_2 = E_2 + m, \quad F_1 = E_1 + m, \quad p^2 = (E - m)F$$

限界のある場合：1 を静止している陽電子を示すとすると、 $F_1 = 0$, $p_{1+} = 1 = p_{1-}$ として表を使うと、 $\sqrt{F_2}(\tilde{u}_2 N u_1)$ の表となる。双方が静止している陽電子であるなら、表に $F_1 = F_2 = 0$; $p_{1+} = p_{2+} = 1$ とすると、 $(\tilde{u}_2 N u_1)$ を示す表となる。

第 14 回講義

行列要素の計算法

始状態 \tilde{u}_1 と終状態 \tilde{u}_2 の間の演算子 M の行列要素を次で表すとする。

$$(\tilde{u}_2 M u_1)$$

行列の要素は、使用される表現がユニタリーで等価変換であれば、その表現に依存しない。これは、

$$\begin{aligned} u'_1 &= S u_1 \\ u'_2 &= S u_2 \\ M' &= S M S^{-1} \\ \tilde{u}'_2 &= \tilde{u}_2 \tilde{S} \end{aligned}$$

であるので、

$$u'_2 M' u'_1 = \tilde{u}_2 \tilde{S} S M S^{-1} S u_1 = \tilde{u}_2 M u_1$$

となる。ここで、 S は $\tilde{S} = S^{-1}$ の性質を持っているとした。

行列の要素を計算する簡単な方法は、単に行列から書き出して演算を行うことである。表 13-1 のデータはこうして得られた。

しかし、以下の例のように、他の方法を使用することもできるが、その場合、より簡単で、付随する情報が得られることもある。規格化規則より、

$$\tilde{u} u = 2m$$

である。これゆえ、 $\tilde{p} u = m u$ から

$$(\tilde{u} \tilde{p} u) = 2m^2$$

となる。同様にして、

$$(\tilde{u} \gamma_\mu \tilde{p} u) = m(\tilde{u} \gamma_\mu u)$$

が得られる。しかし、 $\tilde{u} \tilde{p} = \tilde{p} \tilde{u} = m \tilde{u}$ が成り立つため、

$$(\tilde{u} \tilde{p} \gamma_\mu u) = m(\tilde{u} \gamma_\mu u)$$

となっていることに注意していただきたい。この2つの表現を加えると、

$$(\tilde{u}(\gamma_\mu \vec{p} + \vec{p}\gamma_\mu)u) = 2m(\tilde{u}\gamma_\mu u)$$

となる。練習問題で示した関係

$$\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a} + 2a \cdot b$$

から、

$$\vec{p}\gamma_\mu + \gamma_\mu \vec{p} = 2p_\mu, \quad \gamma_\mu = \vec{1}$$

となることがわかる。しかし、 p_μ はただの数なので、

$$2p_\mu(\tilde{u}u) = 2m(\tilde{u}\gamma_\mu u)$$

と $\tilde{u}u = 2m$ 、それに規格化により

$$(\tilde{u}\gamma_\mu u) = 2p_\mu$$

となる。また、より一般的な関係

$$(\tilde{u}\gamma_t u)(\tilde{u}u) = \frac{p_4}{m} = \frac{E}{m}$$

が得られる。このことから、可能な規格化

$$(\tilde{u}\gamma_t u) = \frac{E}{m}$$

が $(\tilde{u}u) = 1$ と等価である理由がわかる。

問題：上記と同じ方法で、

$$(\tilde{u}\gamma_5 u) = 0$$

を示しなさい。

負のエネルギー状態の解釈

ディラック方程式の解が存在するための必要条件は、

$$E^2 = p^2 + m^2$$

$$E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$$

であることがわかった。正のエネルギーの意味は明らかであるが、負のエネルギーの意味は明確ではない。シュレーディンガーは、負のエネルギー解は物理的に意味を持たないのだから現れたら除くことを提案したことがある。しかし、

負のエネルギー状態を除いてしまうことには、2つの基本的な問題があることがわかった。1つは、物理的な事項、つまり理論物理的な事項である。ディラック方程式では、系の初期状態を正のエネルギー状態であるとする、負のエネルギー状態に遷移を起こす確率が高くなる結果が得られる。これは、負のエネルギー状態を除くと矛盾が生じることを意味する。もう1つは数学的な事項である。つまり、負のエネルギー状態を除くと、波動関数の完全性を満たさない系になってしまうことである。任意の関数を、完全性を満たさない関数で展開して表現することはできない。このことは、シュレーディンガーを困難に陥れた。

問題： $t < 0$ において、ある粒子が正のエネルギー状態で、 x 方向に運動しており、 z 方向に上向きスピン ($s = +1$) であったとする。 $t = 0$ で、この粒子に対し、時間に依存しないポテンシャル $A = A_z (A_x = A_y = 0)$ が作用し、 $t = T$ で作用しなくなったとする。 $t = T$ で、この粒子が負のエネルギー状態となる確率はいくらか。

答え： ($t = T$ で負のエネルギー状態にある確率)

$$= \frac{e^2 A^2}{e^2 A^2 + m^2} \sin^2(\sqrt{e^2 A^2 + m^2} \cdot T)$$

なお、 $E = -m$, $1/\sqrt{F} = \infty$ であるため、一見すると u が無限大となると思える。しかし実際は、 $E = -m$ の場合、 u の成分も 0 となるため、極限過程を考慮しなくてはならない。 $1/\sqrt{F}$ を無視することになると、 u の成分にある F を 0 に、かつ p_{\pm} を 1 に置き換えることで、この問題を回避し、正しい結果を得ることができる。

正のエネルギー準位は $E = m$ から ∞ において連続状態で形づくるとすることで、負のエネルギーを許容すると、 $E = -m$ から $-\infty$ において連続状態を形づく。 m と $-m$ の間には、有効なエネルギー準位はない (図 14-1 参照)。ディラックは、通常ではすべての負のエネルギー準位が占有されているという考えを提案した。このような負のエネルギー状態の電子の海が存在するとして

も、その見かけ上の不明瞭さを説明するには、通常、心理的な側面が条件となり、あまり満足できるものではない。しかし、それにもかかわらず、そのような状況が存在すると仮定した場合、いくつかの重要な結果が存在する。

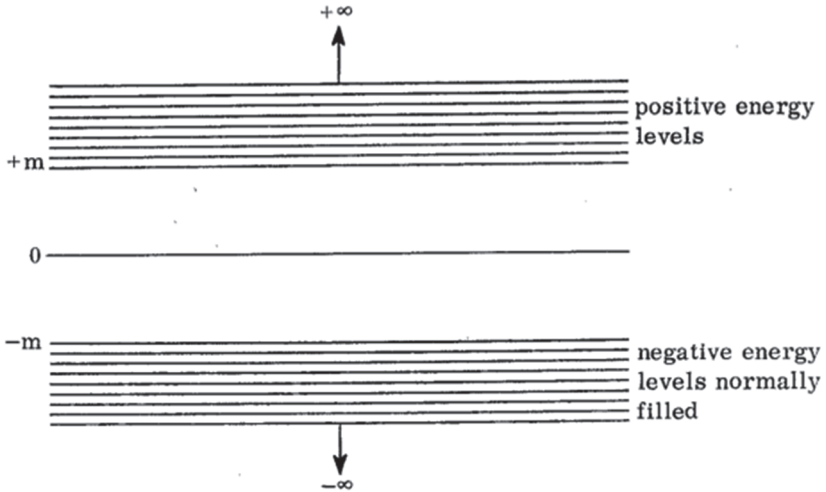


図 14-1

1. 正のエネルギー状態にある電子が負のエネルギー状態への遷移は、通常、オブザーバブルではない。それは、負のエネルギー状態がすべて満たされているため遷移するところがないことによる。
2. 負のエネルギー状態にある電子の海はオブザーバブルではない。電子の海から1つの電子が正のエネルギー状態に遷移すると、そこに「空孔」が生じる。この空孔は正の電荷を持つ電子と同じように振る舞う。すなわち、この空孔は陽電子とみなすことができる。
3. 負の海を満杯にするためには、パウリの排他原理が必要である。つまり、1つの状態に1つの電子しか占有するのではなく、同じ状態に任意の数の電子が入れることができれば、負のエネルギー状態を満たすことはできない。こう考えると、ディラックの理論は排除原理の「正当性の証」でもある。

筆者(ファインマン)は、負のエネルギー状態に対する別の解釈を提案した。このアイデアの基本は、「負のエネルギー」状態は、時間を逆行する電子の状態を示しているとしたことにある。古典的な運動方程式

$$m \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = e \frac{dz_\mu}{ds} F_{\mu\nu}$$

において、固有時間 s の方向を逆にすることは、電荷の符号を逆にすることと同じである。このため、時間を逆行する電子は、時間を順行する陽電子のようにみえる。

初等量子力学において、電子が x_1, t_1 から x_2, t_2 に移動する場合の全振幅は、 x_1, t_1 から x_2, t_2 の間のすべて可能な軌道の振幅の合計を計算することで得られる。しかしここで、これら軌道は常に時間に順行することが仮定されている。そこで、図 14-2 に見られるような一次元の軌跡が考えられる。しかし、この新しい視点に立つと、図 14-3 で示すような軌道も考えられる。

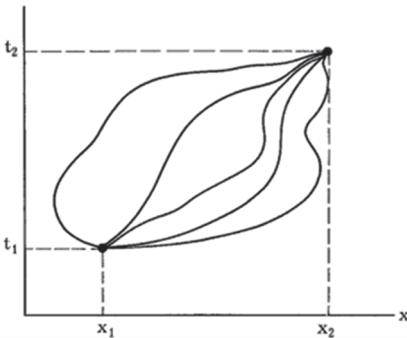


図 14-2

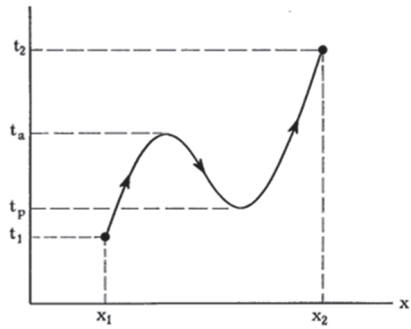


図 14-3

現在と過去だけを意識して、通常、時間の経過を観測者であるとしてイメージすると、次のようになる。

$t_1 \rightarrow t_p$: 初めの電子だけがある

$t_p \rightarrow$: 初めの電子はあるが、どこかで電子-陽電子の対生成が起きている

- $t_p \rightarrow t_a$: 初めの電子と対生成した電子と陽電子がある
 $t_a \rightarrow$: 初めの電子と陽電子が対消滅し、生成した電子だけが残る
 $t_a \rightarrow t_2$: 電子だけがある

この考えを量子力学的に扱うには、次の2つの規則に従うことになる。

1. 陽電子の行列要素を計算する場合、陽電子に対する初めの波動関数と終わりの波動関数を入れ替える必要がある。つまり、過去の状態 Ψ_{past} から未来の状態 Ψ_{fut} に時間を順行する電子の行列要素は

$$\int \bar{\Psi}_{fut} M \Psi_{past} dvol$$

で与えられる。

しかし、時間を逆行する電子は Ψ_{fut} から Ψ_{past} に進むため陽電子の行列要素は

$$\int \bar{\Psi}_{past} M \Psi_{fut} dvol$$

となる。

2. エネルギー E が正の場合、 $e^{-ip \cdot x}$ はエネルギーが $p_4 = E$ である電子の波動関数となる。 E が負の場合、 $e^{-ip \cdot x}$ はエネルギーが $-E$ または $|E|$ 、4元運動量が $-p$ である陽電子の波動関数となる。

量子電磁力学におけるポテンシャル問題

第15回講義

対生成と対消滅

前回の講義で、 Ψ_1 状態にあった電子が散乱されて Ψ_2 状態になった2つの可能な経路を説明した。

ケース I : Ψ_1 、 Ψ_2 ともに正のエネルギーであり、 Ψ_1 は「過去」にある電子、 Ψ_2 は「未来」にある電子であると解釈できる。すなわち、電子散乱である。

ケースII： ψ_1 、 ψ_2 ともに負のエネルギーであり、 ψ_1 は「未来」にある陽電子、 ψ_2 は「過去」にある陽電子と解釈できる。すなわち、陽電子散乱である。

負のエネルギー状態の存在を容認したことで、さらに2つの経路が可能になる。次の2つがそうである。

ケースIII： ψ_1 は正のエネルギー、 ψ_2 は負のエネルギーであり、 ψ_1 は「過去」にある電子、 ψ_2 は「未来」にある陽電子であると解釈できる。「過去」には2つの状態があり、「未来」にはないので、対消滅を示している。

ケースIV： ψ_1 は負のエネルギー、 ψ_2 は正のエネルギーであり、 ψ_1 は「未来」にある陽電子、 ψ_2 は「未来」にある電子であると解釈できる。これは、対生成を示している。

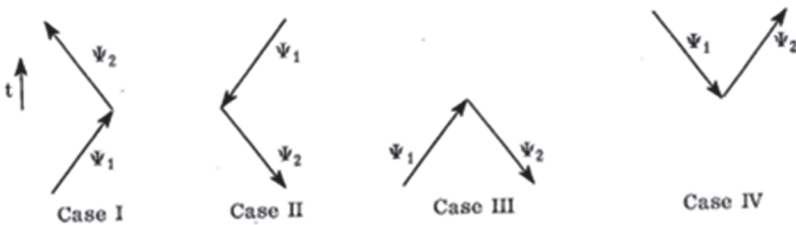


図 15-1

この4つのケースを図にすると、図15-1のようになる。ここで注意しておくことは、どの図においても矢印は ψ_1 から ψ_2 に向いているが、時間の経過は図の下から上の向きで示されていることである。矢印は、負のエネルギー状態の解釈で、その時点での電子の運動方向を示している。一般には、 \vec{p} が正であるか負であるか、つまり電子か陽電子かによって矢先が正または負の時間を指している。

エネルギー保存

ケース I の散乱に関するエネルギーの関係は、これまでの講義で示されている。

それに、ケース II でも同じ結果が得られることがわかる。これを示すために、ケース I において、電子がエネルギー E_1 から E_2 になり、摂動ポテンシャルが $\exp(-i\omega t)$ に比例するなら、この摂動は正のエネルギー ω をもたらすことに気づいていただきたい。これを知るには、散乱の振幅が、

$$\int \exp(-iE_2 t)^* \exp(-i\omega t) \exp(-iE_1 t) dt = \int \exp(iE_2 t - i\omega t - iE_1 t) dt \quad (15-1)$$

に比例することに注目すればよい。

これまで示したように、 E_2 と $E_1 + \omega$ の間に共鳴があるため、 $E_2 \approx E_1 + \omega$ となるエネルギーだけが寄与することになる。ケース II でも同じ積分が成り立つが、 E_2 と E_2 は負である。陽電子は、 $E_{post} = -E_2$ のエネルギー（過去）から $E_{fur} = -E_1$ のエネルギー（未来）へと伝播する。同じ摂動エネルギーでも、 $E_2 = E_1 + \omega$ あるいは $-E_{past} = -E_{fur} + \omega$ のときだけ振幅が大きくなり、 $E_{fur} = \omega + E_{past}$ となる。つまり、電子の場合と同じように、摂動は正のエネルギー ω を運んでいる。

伝播核

非相対論的な場合（シュレーディンガー方程式）、摂動ポテンシャルを含む波動方程式は、

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_0 \Psi + V \Psi \quad (15-2)$$

で表される。ここで V は摂動ポテンシャル、 H_0 は非摂動のハミルトニアンである。自由粒子の場合、時空の点 1 から点 2 への経路の振幅を与える積分核は、

$$\begin{aligned} K_0(2, 1) &= N \exp\left\{ \frac{i}{2} m \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} \right\} & t_2 > t_1 \\ &= 0 & t_2 < t_1 \end{aligned} \quad (15-3)$$

で示される。ここで、規格化係数 N は、時間間隔 $t_2 - t_1$ と粒子の質量 m に依存する量で、

$$N = \sqrt{\frac{m}{2\pi i(t_2 - t_1)}}$$

で表される。なお、積分核は $t_2 < t_1$ では定義により 0 となる。 K_0 が次の式

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial t_2} - H_0(2) \right\} K_0(2, 1) = i\delta(2, 1) \quad (15-4)$$

を満たすことを示すことができる。

摂動ポテンシャル V が存在する場合は、同様の振幅を与える伝播核 $K_V(2, 1)$ は、

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial t_2} - H_0(2) - V(2) \right\} K_V(2, 1) = i\delta(2, 1) \quad (15-5)$$

を満たさなければならない。 $K_V(2, 1)$ は、次の級数から計算できる。

$$\begin{aligned} K_V(2,1) &= K_0(2,1) - i \int K_0(2,3)V(3)K_0(3,1)d^3x_3 dt_3 \\ &\quad - \int K_0(2,4)V(4)K_0(4,3)V(3)K_0(3,1)d^3x_4 dt_4 d^3x_3 dt_3 + \dots \end{aligned} \quad (15-6)$$

全ハミルトニアン $H = H_0 + V$ が時間に依存せず、系のすべての定常状態 ϕ_n が既知である場合、 $K_V(2,1)$ は次の和

$$K_V(2,1) = \sum_n \exp\{-iE_n(t_2 - t_1)\} \phi_n(x_2)\phi_n^*(x_1) \quad (15-7)$$

から求めることができる。

これらの考え方を相対論的方程式（ディラック方程式）に適用できるように拡張することは簡単である。ハミルトニアンにある形式を選ぶことで、ディラック方程式は

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})\Psi + e\phi\Psi + m\beta\Psi$$

と書くことができる。伝播核を K^A とすると、核は方程式

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t_2} - e\phi_2 - \boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\nabla_2 - e\mathbf{A}_2) - m\beta \right] K^A(2,1) = i\beta\delta(2,1) \quad (15-8)$$

の解となる。ハミルトニアンから得られる核が相対論的不変となるように、最後の項に行列 β が挿入されている（注：非相対論的な場合である式(15-6)と類似している）。この式に β を乗じると、より単純な形になる。

$$(i\vec{\nabla}_2 - e\vec{A}_2 - m)K^A(2,1) = i\delta(2,1) \quad (15-9)$$

自由粒子の方程式は、 $\vec{A}_2 = 0$ により簡単に得られる。これを、自由粒子核 K_+ と記すと、

$$(i\vec{\nabla}_2 - m)K_+(2,1) = i\delta(2,1) \quad (15-10)$$

を満たす。非相対論の場合では、記号 K_+ を K_0 に置き換え、定義式(15-10)を式(15-4)に置き換えればよい。

K_V の級数展開である式(15-6)のように、 K_V も

$$\begin{aligned} K^A(2,1) &= K_+(2,1) - i \int K_+(2,3) e\vec{A}(3) K_+(3,1) d\tau_3 \\ &\quad - \int K_+(2,3) e\vec{A}(3) K_+(3,4) e\vec{A}(4) K_+(4,1) d\tau_3 d\tau_4 + \dots \end{aligned} \quad (15-11)$$

と展開できる。

核は4行4列の行列になったので、 Ψ のすべての成分を求めることができることに注意しておく。このことから、式(15-11)の項の順番が重要であることがわかる。積分の要素は、実のところ、4元空間の体積要素

$$d\tau = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

である。ポテンシャル $-ie\vec{A}(1)$ は、粒子が点(1)で1回散乱する1立方メートル・1秒あたりの振幅と解釈できる。したがって、式(15-11)の解釈は、式(15-6)の解釈とよく似ている。

問題：式(15-11)で定義される K^A が式(15-8)と式(15-9)と矛盾しないことを示しなさい。

非相対論においては、粒子が時間に逆行する運動の経路は除かれる。しかし、ここでは、これはもはや正しくない。ディラック方程式の負のエネルギー固有値の存在と解釈により、時間に逆行する経路を含むことが解釈可能となる。

$t_4 > t_3$ を考えることは、仮想的な対の存在を意味する。 t_4 から t_3 までの区間は、陽電子の運動を表している (図 15-2 参照)。

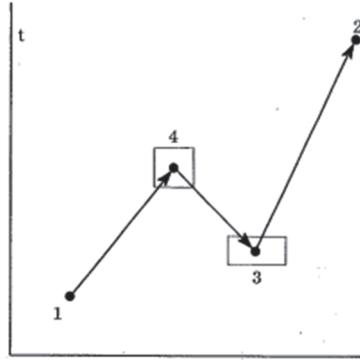


図 15-2

時間定常場において、系のすべての状態について波動関数 ϕ_n が既知であれば、 K_+^A は、

$$\begin{aligned}
 K_+^A(2,1) &= \sum_{pos.energies} \exp\{-iE_n(t_2 - t_1)\} \phi_n(x_2) \tilde{\phi}_n(x_1) \quad t_2 > t_1 \\
 &= - \sum_{neg.energies} \exp\{-iE_n(t_2 - t_1)\} \phi_n(x_2) \tilde{\phi}_n(x_1) \quad t_2 < t_1 \quad (15-12)
 \end{aligned}$$

で定義することができる。

方程式 (15-9) の他の解は、

$$\begin{aligned}
 K_0^A(2,1) &= \sum_{pos.energies} \exp\{-iE_n(t_2 - t_1)\} \phi_n(x_2) \tilde{\phi}_n(x_1) \\
 &+ \sum_{neg.energies} \exp\{-iE_n(t_2 - t_1)\} \phi_n(x_2) \tilde{\phi}_n(x_1) \quad t_2 > t_1 \\
 &= 0 \quad t_2 < t_1 \quad (15-13)
 \end{aligned}$$

である。

式 (15-12) は、負のエネルギー状態を陽電子で解釈と同じ解釈による。したがって、時機が「順行」 ($t_2 > t_1$) であるときは、電子が存在し、正のエネルギー状態だけが寄与する。時期が「逆行」 ($t_2 < t_1$) の場合は、陽電子が存在し、負のエネルギー状態だけが寄与する。一方、解 (15-13) はそれほど満足のいく解釈はできない。解 (15-13) で定義される核 K_0^A は、(以下に示すように) 方程式 (15-9) の数学的解として満足できるが、解 (15-13) の解釈には負のエネルギー状態にある電子という考え方が必要となる。

2 つの核が同じ非斉次方程式の解であることを示したい。任意 t_2 において、この 2 つの差は、

$$\sum_{neg.energies} \exp(iE_n t_1) \exp(-iE_n t_2) \phi_n(x_2) \tilde{\phi}_n(x_1)$$

であることに注意すること。これは、項ごとに斉次方程式の解である (すなわち、方程式 (15-9) の右辺を 0 とした解)。このような解が 2 つ存在することは、境界条件が明確に定まっていないことによる。ここでは、 K_+^A を使うことにする。

式 (15-12) で定義される核 K_+^A により、冒頭で示したケース 3 (対消滅) とケース 4 (対生成) を扱うことができる。いずれの場合も、陽電子と電子の経路の交点にポテンシャル $-ie\vec{A}(3)$ が作用する。

第 16 回講義

核 $K_+(2, 1)$ の使用

非相対論では、時刻 t_2 の点 x_2 における波動関数を、 t_2 より前の時刻 t_1 における波動関数の知識から、非相対論的核 $K_0(x_2, t_2; x_1, t_1)$ を使って、

$$\Psi(x_2, t_2) = \int K_0(x_2, t_2; x_1, t_1) \Psi(x_1, t_1) d^3x_1$$

で計算することができる (図 16-1 参照)。

これを相対論的に一般化したものが、

$$\Psi(x_2, t_2) = \int K_+(x_2, t_2; x_1, t_1) \gamma_t \Psi(x_1, t_1) d^3 x_1$$

であると予想できる。しかし、これは誤りであることがわかった。相対論的な場合、 t_2 で $K_+(2,1)$ が 0 でないからといって、それ以前の時間における波動関数だけを知っていても十分ではない。このように核を定義すると(第 15 講義)、 x_2, t_2 における波動関数 (図 16-2 参照) は、

$$\Psi(x_2, t_2) = \int K_+(x_2, t_2; x_1, t_1) \gamma_t \Psi(x_1, t_1) d^3 x_1 - \int K_+(x_2, t_2; x_1, t'_1) \gamma_t \Psi(x_1, t'_1) d^3 x_1$$

$$t_1 < t_2 < t'_1 \quad (16-1)$$

で与えられる。

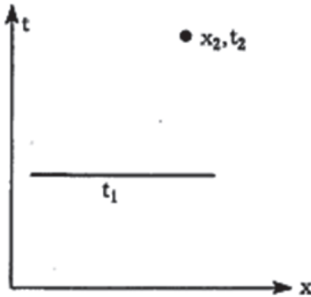


図 16-1

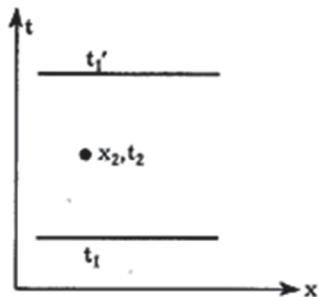


図 16-2

第 1 項は前の時間で正のエネルギー状態からの寄与、第 2 項は後の時間で負のエネルギー状態からの寄与である。この式を一般化するには、点 x_2, t_2 を囲む 4 次元曲面上での $\Psi(x_1, t_1)$ の振る舞いを知る必要があることになる (図 16-3 参照)。

$$\Psi(x_2, t_2) = \int K_+(2,1) \vec{N}(1) \Psi(1) d^4 x_1 \quad (16-2)$$

ここで、 \vec{N} は点 x_2, t_2 を囲む曲面の 4 元ベクトルの法線である。

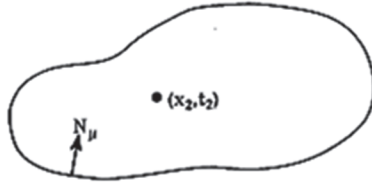


図 16-3

遷移確率

ポテンシャル \vec{A} の作用により状態 f から状態 g に遷移確率振幅は、非相対論と同様の式、

$$a_{21} = \int \int \tilde{g}(2)\beta K_+^A(2,1)\beta f(1)d^3x_1d^3x_2 \quad (16-3)$$

で与えられる。 $K_+^A(2,1)$ を $K_+(2,1)$ で展開すると、式(15-11)となり、自由粒子として状態 f から状態 g に遷移確率振幅を0(状態 f と状態 g は直交する)と仮定すると、第1次近似(ボルン近似)での遷移確率振幅は

$$a_{21} = -i \int \tilde{g}(2)\beta \int K_+(2,3)e\vec{A}(3)K_+(3,1)\beta f(1)d\tau_3d^3x_1d^3x_2$$

となる。便利のために、

$$f(3) = \int K_+(3,1)\beta f(1)d^3x_1$$

$$\tilde{g}(3) = \int \tilde{g}(2)\beta K_+(2,3)d^3x_2$$

を定義しておく。これらは、粒子が散乱直前の自由粒子波動関数 f と散乱直後の自由粒子波動関数 g を持つことを述べ、自由粒子としての運動の計算を無視している。第1次近似での遷移の確率振幅は、

$$-i \int \tilde{g}(3)e\vec{A}(3)f(3)d\tau_3 \quad (16-4)$$

と書くことができる(τ は時間および空間を意味する)。第2次近似は、

$$- \int \int \tilde{g}(4)e\vec{A}(4)K_+(4,3)e\vec{A}(3)f(3)d\tau_3d\tau_4$$

と書くことができる。 $f(3)$ が負のエネルギー状態であるなら、過去に向かう電子の代わりに未来に向かう陽電子を表し、この振幅で記述される過程は対生成である。

クーロン力による電子の散乱

前節で示した理論を用いて、電荷 Ze の原子核からの電子散乱を計算してみる (原子核の質量は電子の質量に比べて非常に大きい)。入射電子の運動量の向きは x 方向、散乱電子の運動量の向きは x - y 面であるとする (図 16-4 参照)。



図 16-4

$$\vec{p}_1 = \gamma_t E_1 - \gamma_x p_{1x}$$

$$\vec{p}_2 = \gamma_t E_2 - \gamma_x p_{2x} - \gamma_y p_{2y}$$

静電荷 Ze のポテンシャルは、

$$\phi = \frac{Ze}{r}, \quad A = 0, \quad \vec{A} = \gamma_t \frac{Ze}{r}$$

である。初めの波動関数と終わりの波動関数は平面波である。4 元成分の波動関数で表すと、

$$f(1) = u_1 e^{-ip_1 \cdot x} \quad g(2) = u_2 e^{-ip_2 \cdot x}$$

である。したがって、式 (16-4) により、状態 f から状態 g に遷移 (運動量 p_1 から運動量 p_2) の第 1 次近似による振幅は、

$$M = -i \int \tilde{u}_2 e^{ip_2 \cdot x} \frac{Ze^2}{r} \gamma_t u_1 e^{-ip_1 \cdot x} d^3 x dt$$

である。波動関数の空間と時間の依存を分けると、

$$M = -i(\tilde{u}_2 \gamma_t u_1) \left[\int e^{-ip_2 x} \frac{Ze^2}{r} e^{ip_1 x} d^3x \right] \left[\int_0^T e^{iE_2 t} e^{-iE_1 t} dt \right]$$

となる。最初の積分はポテンシャル $V(Q)$ を 3次元フーリエ変換した項で、非相対論的な散乱理論での評価は、

$$M = -i(\tilde{u}_2 \gamma_t u_1) [V(Q)] \left[\frac{\exp\{i(E_2 - E_1)T - 1\}}{i(E_2 - E_1)} \right] \quad (16-5)$$

$$V(Q) = \frac{4\pi Ze^2}{Q^2} \quad Q = p_1 - p_2$$

となる。単位時間あたりの遷移確率は、

$$\text{単位時間あたりの遷移確率} = \frac{2\pi|M|^2}{\Pi N} \left(\text{終状態の密度} \right) \quad (16-6)$$

で与えられる。これは時間に依存する摂動論から得られた結果である。唯一の新しい因子は、波動関数が単位体積あたり 1 つに規格化されていないことを考慮した規格化因子 ΠN である。 ΠN は各波動関数各々の因子 N の積である。つまり始状態の波動関数の因子、終状態の波動関数の因子などの積である。因子は、

$$N = (\tilde{u} \gamma_t u) \quad (16-7)$$

と対象の粒子ごとに定める。規格化すると、 $N=2E$ となる。この因子の理由は、遷移確率の計算は、通常、非相対論的な方法 $\Psi^* \Psi = 1$ あるいは $(\tilde{u} \gamma_t u) = 1$ を使って規格化するが、波動関数が

$$(\tilde{u} u) = 2m \quad \text{あるいは} \quad (\tilde{u} \gamma_t u) = 2E$$

で規格化されていることによる（このため、この場合は $N=1$ である）。

このように計算した行列要素 M は相対論的不変となり、今後、 M に最大の関心が集まるだろう。遷移確率は、 M を知った上で、式(16-6)から計算することができる。

状態密度と断面積

検討している電子散乱問題では、

$$M = -i(\tilde{u}_2 \gamma_t u_1) \frac{4\pi Ze^2}{Q^2}$$

であるので、遷移確率は

$$\text{単位時間あたりの遷移確率} = \frac{2\pi}{(2E_1)(2E_2)} |\langle \tilde{u}_2 \gamma_t u_1 \rangle|^2 \left| \frac{4\pi Z e^2}{Q^2} \right|^2 \frac{E_2 p_2 d\Omega}{(2\pi)^3} \quad (16-8)$$

となる。ここで、終状態の密度は、

$$\text{状態密度} = \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 dE_2} = \frac{p_2^2 dp_2 d\Omega}{(2\pi)^3 dE_2}$$

とした。しかし、 $E_2^2 = p_2^2 + m^2$ であるので、 $dp_2/dE_2 = E_2/p_2$ それに

$$\text{状態密度} = \frac{E_2 p_2 d\Omega}{(2\pi)^3}$$

が得られる。入射する平面波を 1 立方メートルあたり 1 個の粒子で規格化すると、断面積は 1 秒間あたりの遷移確率³で、

$$\text{単位時間あたりの遷移確率} = \sigma v_1 = \sigma \frac{p_1}{E_1}$$

または

$$\sigma = \frac{p_1}{E_1} \times (\text{単位時間あたりの遷移確率})$$

を与える。

相対論的散乱の計算と非相対論的散乱の計算との本質的な違いは、行列要素 $(\tilde{u}_2 \gamma_t u_1)$ にある。表 13-1 より、 x - y 平面上を運動する粒子、それに $s_1 = +1$, $s_2 = +1$ であるので、

$$|\langle \tilde{u}_2 \gamma_t u_1 \rangle|^2 = \frac{|F_2 F_1 + p_{1+} p_{2-}|^2}{F_1 F_2}$$

である。ここで、

$$F_1 = F_2 = E + m$$

である (エネルギーの保存則 $E_1 = E_2$ は、式 (16-5) の時間積分の性質から、このようになる)。また、

$$\begin{aligned} p_{1+} &= p \\ p_{2-} &= p e^{-i\theta} \end{aligned}$$

である（終状態の運動量の大きさは、 $E_1 = E_2$ から、始状態の運動量の大きさに等しいことがわかる）。すなわち、

$$\begin{aligned} |(\bar{u}_2 \gamma_t u_1)|^2 &= \frac{|(E+m)^2 + p^2 e^{-i\theta}|^2}{(E+m)^2} \\ &= \frac{4E^2(E+m)^2 \{1 - (p^2/E^2) \sin^2(\theta/2)\}}{(E+m)^2} \\ &= (2E)^2 \{1 - v^2 \sin^2(\theta/2)\} \end{aligned}$$

$s_1 = +1, s_2 = -1$ あるいは $s_1 = -1, s_2 = +1$ のとき、 γ_t の行列要素は 0 である。 $s_1 = -1, s_2 = -1$ のとき、行列要素の絶対値は $s_1 = +1, s_2 = +1$ のときと同じである。したがって、スピンは散乱の際に（ボルン近似においては）変化せず、断面積はスピンに依存しない。

$$\sigma = \frac{4Z^2 e^4 E^2}{Q^4} d\Omega \{1 - v^2 \sin^2(\theta/2)\}$$

$$Q = 2ps \sin \frac{\theta}{2}$$

この結果を得るために用いたボルン近似の妥当性の判定は、 $(Ze^2/\hbar v) \ll 1$ である。相対論的極限 $v \approx c$ では、 $Z \ll 137$ となる。クーロンポテンシャルにおいては、非相対論での計算と同様に、散乱断面積は正確に（ポテンシャルのすべてのオーダーで厳密に）計算できる。ディラック方程式のこの厳密解には超幾何関数が含まれる。この計算は、N.F. モット（1905～1996）によって最初に行われたので、モット散乱と呼ばれている。中程度のエネルギー（200keV）であれば、スピンが変化する確率がある。このようにして、偏極電子が生成される可能性がある。

問題：（1）ラザフォード散乱公式を、クライン-ゴールドン方程式（スピンを持たない粒子）で導出しなさい。

結果：少し前の式にある $1 - v^2 \sin^2(\theta/2)$ を 1 に置き換えた形をしている。

（2）（1）で得た散乱公式が陽電子に対しても正しいことを示しなさい（行列要素の計算には陽電子の状態を使いなさい）。

第 17 回講義

自由粒子に対する伝播核の計算

前回の講義で示したように、摂動ポテンシャルがなく、系のハミルトニアンが時間的に一定である場合の伝播核は、

$$\begin{aligned}
 K_+(2,1) &= \sum_{+n} \phi_n(x_2) \tilde{\phi}_n(x_1) \exp\{-iE_n(t_2 - t_1)\} & t_2 > t_1 \\
 &= - \sum_{-n} \phi_n(x_2) \tilde{\phi}_n(x_1) \exp\{-iE_n(t_2 - t_1)\} & t_2 < t_1
 \end{aligned}$$

である。自由粒子の固有関数 ϕ_n は、

$$u_p \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})$$

で、 n の和は p の積分となる。 u_p は、運動量 p 、正または負のエネルギー、上向きまたは下向きスピに対応するスピノールである。すると、自由粒子の伝播核は、 $t_2 > t_1$ および $E_p = +\sqrt{p^2 + m^2}$ に対して、

$$K_+(2,1) = \sum_{spins} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} u_p \tilde{u}_p \exp\{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\} \cdot \exp\{-iE_p(t_2 - t_1)\}$$

となる。係数の $1/(2\pi)^3$ は、単位体積あたりの運動量空間の状態密度を表す。また係数 $1/(2E_p)$ は、ここで使われている規格化 $\tilde{u}u = 2m$ または $\tilde{u}\gamma_t u = 2E_p$ に起因している。 u_p は正のエネルギーに対応している。負のエネルギー $E_p = -\sqrt{p^2 + m^2}$ に対して、 u_p はそれに応じて変更される。 $K_+(2,1)$ は、 $t_2 < t_1$ の場合、

$$K_+(2,1) = - \sum_{spins} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} u_p \tilde{u}_p \exp\{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\} \cdot \exp\{-iE_p(t_2 - t_1)\}$$

となる。

計算は、最初に、 $t_2 > t_1$ の場合について行う。まず、エネルギーが正の場合の $u_p \tilde{u}_p$ 、それに x - y 平面上向きスピンの場合での \mathbf{p} を計算する。これらの条件下で、

$$u_p = \begin{pmatrix} E + m \\ 0 \\ 0 \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{E + m}}$$

$$\tilde{u}_p = (E + m \quad 0 \quad 0 \quad -p_x + ip_y) \times \frac{1}{\sqrt{E + m}}$$

となる。なお、 $u_p \tilde{u}_p$ の演算順序が通常とは逆であるため、積はスカラーではなく行列になる。これは、通常の行列の乗算の規則によって、

$$u_p \tilde{u}_p = \begin{pmatrix} (E + m)^2 & 0 & 0 & (E + m)(-p_x + ip_y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (E + m)(p_x + ip_y) & 0 & 0 & (p_x + ip_y)(-p_x + ip_y) \end{pmatrix} \frac{1}{E + m}$$

となる。

しかし、

$$(p_x + ip_y)(-p_x + ip_y) = -\mathbf{p}^2 = -E^2 + m^2$$

となり、これより行列は、

$$u_p \tilde{u}_p = \begin{pmatrix} E + m & 0 & 0 & -p_x + ip_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_x + ip_y & 0 & 0 & -E + m \end{pmatrix} \quad (\text{上向きスピン})$$

となる。同様の手順で、下向きスピンの場合の結果は、

$$u_p = \begin{pmatrix} 0 \\ E + m \\ p_x - ip_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{E + m}}$$

$$\tilde{u}_p = (0 \quad E - m \quad -p_x - ip_y \quad 0) \times \frac{1}{\sqrt{E + m}}$$

$$u_p \tilde{u}_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E + m & -p_x - ip_y & 0 \\ 0 & p_x - ip_y & -E + m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{下向きスピン})$$

となる。これらの上向きスピン、下向きスピンの行列の和が

$$E\gamma_t - p_x\gamma_x - p_y\gamma_y + m$$

で表されることは容易に確かめることができる。 \mathbf{p} が任意の方向である場合の一般的な場合では、唯一の変化は追加項 $-p_z\gamma_z$ であることは明らかである。このことから、一般に、

$$(u_p \tilde{u}_p)_{spin\ up} + (u_p \tilde{u}_p)_{spin\ down} = E\gamma_t - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m = \vec{p} + m$$

となる。この結果を得るのに、エネルギーの符号は使用していないので、どちらの符号でも同じである。

ここで、 $t = t_2 - t_1$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ と置く。 $t > 0$ の場合、伝播核は、

$$K_+(2,1) = \int (E\gamma_t - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \times \exp\{-i(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})\}$$

となる。指数部に $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$ というかたちで p が含まれているため、この積分を解くことは難しい。なお、

$$\begin{aligned} K_+(2,1) &= \left(i\gamma_t \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma_x \frac{\partial}{\partial x} + i\gamma_y \frac{\partial}{\partial y} + i\gamma_z \frac{\partial}{\partial z} + m \right) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \exp\{-i(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})\} \\ &= i(i\vec{\nabla} + m)I_+(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

という形で表すこともできる。ここで、

$$I_+(t, \mathbf{x}) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \exp\{-i(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})\}$$

である。この形式では、積分を 4 回行うところ、1 回の積分だけ行えばよいことになる。練習として、 $t < 0$ について、 t の符号が変わる以外は同じ結果となることを確認することができる。したがって、 $I_+(t, \mathbf{x})$ の式で t の代わりに $|t|$ とすることで、すべての t について成り立つと言える。

この積分を行うことで、次の結果が得られた。

$$I_+(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \delta(s^2) + \frac{m}{8\pi s} H_1^{(2)}(ms)$$

ここで、 $t > |\mathbf{x}|$ の場合 $s = +\sqrt{t^2 - \mathbf{x}^2}$ であり、 $t < |\mathbf{x}|$ の場合 $s = -i\sqrt{t^2 - \mathbf{x}^2}$ である。また、 $\delta(s^2)$ はデルタ関数、 $H_1^{(2)}(ms)$ はハンケル関数である。また、これとは別の表現として、

$$I_+(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty d\alpha \exp\left[-\frac{i}{2} \left\{ \frac{m^2}{\alpha} + \alpha(t^2 - \mathbf{x}^2) \right\}\right]$$

がある。この 2 つの形式はいずれも複雑で、あまり実用的とはいえない。運動量表現に変換することで、飛躍的に単純化できることが直ちにわかる。

$I_+(t, \mathbf{x})$ は、実際には $|\mathbf{x}|$ だけに依存し、その方向には依存しないことに注意する。時空図 (図 17-1) において、空間軸は $|\mathbf{x}|$ を示し、対角線は t 軸を含む光円錐の表面、つまり通常の意味での $t - |\mathbf{x}|$ 空間の到達領域を表す。 s が大きい場合の $I_+(t, \mathbf{x})$ の漸近形は、 e^{-ims} に比例することがわかる。伝達可能な領域が光円錐の内側に限られる場合、大きな s は $t^2 \gg |\mathbf{x}|^2$ を意味するので、漸近線の領域は t 軸近傍の点線で描かれた円錐の内側にあり、その漸近形は、

$$I_+(t, \mathbf{x}) \rightarrow e^{-ims} \approx \exp\left\{-im\left(t - \frac{x^2}{2t}\right)\right\} \approx e^{-imt}$$

となる。

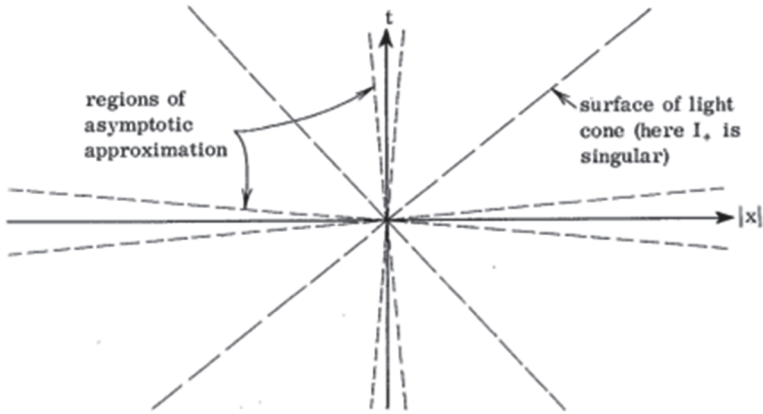


図 17-1

最初の形式は、非相対論的理論で使われる自由粒子の伝搬核と本質的に同じである。新しい理論のように、可能な「軌道」が光円錐内の領域に限定されない場合、この漸近近似により、含まれる別の領域は、 $|\mathbf{x}|^2 \gg t^2$ を満たす大きな s に対応する $|\mathbf{x}|$ 軸に沿った点線円錐内にある。したがって、

$$I_+(t, \mathbf{x}) \rightarrow e^{-ims} \approx \exp\left\{-im\sqrt{x^2 - t^2}\right\} \approx e^{-m|\mathbf{x}|}$$

となる。これが小さくなる $|\mathbf{x}|$ 方向の距離は、コンプトン波長 ($m \rightarrow mc/\hbar$ は長さの逆数の次元を持つ) 程度で、現実には光円錐の外側にある $t - |\mathbf{x}|$ 空間にはほとんど伝達できないことがわかる。

ここで、運動量表現への変換を行う。これは積分公式

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_4 \frac{\exp(-ip_4 t)}{p_4^2 - E_p^2 + i\varepsilon} = -\frac{\pi i}{E_p} \exp(-i|E_p|t)$$

を使うことで容易になる。分母の $i\varepsilon$ 項は、積分路の途中 $p_4^2 = E_p^2$ で特異点の適切な側を通過できるように導入してある。間違った側を通ると、右側の指数の符号が逆になる。

問題： 周回積分などを使って、上の積分を計算しなさい。

上記の積分の関係から、 $I_+(t, \mathbf{x})$ は

$$I_+(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^4} dp_4 \frac{\exp(-ip_4 t) \exp(+i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}{p_4^2 - E_p^2 + i\varepsilon}$$

となる。しかし、 $E_p^2 = p^2 + m^2$ だからこれは

$$I_+(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ip \cdot x)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

である。 p は 4 元ベクトルであるので、 $d^4 p = dp_4 dp_1 dp_2 dp_3$ それに $p^2 = p_\mu p_\mu$ である。以下、 $i\varepsilon$ 項を省略する。 m が無限小の負の虚部を持つと考えておけば、この効果を考慮できる。この形式では、運動量表示への変換は次のように簡単にできる（実際には空間と時間の両方のフーリエ変換をとるので、正しくは運動量-エネルギー表示である）。

$$i_+(p) = \int I_+(t, \mathbf{x}) \exp\{+i(p \cdot x)\} d^4 x = \int \frac{d^4 \xi d^4 x}{(2\pi)^4} \times \frac{\exp(-i(\xi - p) \cdot x)}{\xi^2 - m^2}$$

ここで、 p 積分の p にダミー変数 ξ を使った。しかし、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-i(\xi - p) \cdot x\} d^4 x = (2\pi)^4 \delta(\xi - p)$$

である。したがって、 ξ 積分の結果は

$$i_+(p) = \frac{1}{p^2 - m^2}$$

となる。最後に、 $I_+(t, \mathbf{x})$ に演算子 $i(\vec{\nabla} + m)$ を作用すると、伝播核（ここでは $x = x_2 - x_1$ ）

$$\begin{aligned}
K_+(2,1) &= i(i\vec{\nabla} + m)I_+(t, \mathbf{x}) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (i\vec{\nabla} + m) \frac{\exp\{-i(p \cdot x)\}}{p^2 - m^2} \\
&= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\vec{p} + m}{p^2 - m^2} \exp\{-i(p \cdot x)\}
\end{aligned}$$

が得られる。これは $\exp\{-i(p \cdot x)\}$ に $i\vec{\nabla}$ を演算することが \vec{p} を乗じることと同じであることに気づく。恒等式

$$\frac{1}{\vec{p} - m} = \frac{1}{\vec{p} - m} \frac{\vec{p} + m}{\vec{p} + m} = \frac{\vec{p} + m}{p^2 - m^2}$$

から、核は

$$K_+(2,1) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\exp\{-i(p \cdot x)\}}{\vec{p} - m}$$

と記述することもできる。 $I_+(t, \mathbf{x})$ と同じ計算方法で、 $K_+(2,1)$ を運動量表現で変換することにより、

$$k(p) = \int K_+(2,1) \exp\{+i(p \cdot x)\} d^4x = i \frac{1}{\vec{p} - m}$$

となることがわかる。これが、求めていた結果である。

実はこの変換は、もっと簡単な方法で得ることができた。 $K_+(2,1)$ は、 $(i\vec{\nabla} - m)$ のグリーン関数、つまり

$$(i\vec{\nabla} - m)K_+(2,1) = i\delta(2,1) \quad (17-1)$$

であり、 $i\vec{\nabla}$ は運動量表現での \vec{p} 、 $\delta(2,1)$ は 1 であることが知られている。したがって、この方程式の変換は容易に、

$$(\vec{p} - m)k(p) = i$$

あるいは、

$$k(p) = \frac{i}{(\vec{p} - m)} \quad (17-2)$$

と表すことができる。 $K(2,1)$ に関する式 (17-1) が複数の解を持つことは、 $p^2 = m^2$ であるとき $\frac{1}{\vec{p} - m}$ が特異点を持つことを式 (17-2) に反映している。この原因による極を積分でどう扱うかは、これから述べなければならない。求めたい特別な解を選択する規則は、 m が無限小の負の虚数部を持つと見なすことである。

第 18 回講義

運動量表示

自由粒子の伝搬核は運動量表現で非常に簡単に表せ、

$$k(p) = \frac{i}{\vec{p} - m}$$

となり、すべての方程式をこの表現に変換することが便利である。特に、高速で運動する自由粒子を含む問題で有効である。これには、4 次元フーリエ変換が必要である。このポテンシャルを変換するため、

$$\vec{a} = \int \vec{A}(x) \exp(iq \cdot x) d^4x \quad (18-1)$$

を定義する。これにより、逆変換は

$$\vec{A}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \vec{a}(q) \exp(-iq \cdot x) d^4q \quad (18-2)$$

となる。関数 $a(q)$ は、運動量(q) を含むポテンシャルによる振幅であると解釈する。例として、 $A = 0$, $\varphi = Ze/r$ で与えられるクーロンポテンシャルを考える。

これを式 (18-1) に代入すると、

$$\vec{a}(q) = \frac{4\pi Ze}{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}} \delta(q_4) \gamma_t$$

が得られる。ここで、ベクトル \mathbf{Q} は運動量の空間部分である。デルタ関数 $\delta(q_4)$ は \vec{A} の時間依存性から生じる。

行列要素

運動量表現の利点は、行列要素の計算が簡単なことである。空間表現では、1 次の摂動行列の要素は積分値

$$M = -i \int \bar{g}(2) e \vec{A}(2) f(2) d\tau_2$$

で与えられることを思い出すこと。自由粒子の場合、これは

$$M = -i \int \tilde{u}_2 \exp(ip_2 \cdot x_2) e\vec{A}(2) u_1 \exp(-ip_1 \cdot x_1) d\tau_2 \quad (18-3)$$

となる。運動量表現では、これは単に

$$M = -i(\tilde{u}_2 e\vec{a}(q) u_1) \quad (18-3')$$

と表され、 \vec{q} は 3 元ベクトル q 、

$$\vec{q} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

に類似して定義できる。

空間表現における 2 次の行列要素は、

$$- \int \int \tilde{g}(2) e\vec{A}(2) K_+(2,1) e\vec{A}(1) f(1) d\tau_1 d\tau_2$$

で与えられる。これを自由粒子に置き換え、さらにポテンシャル関数をフーリエ変換して式 (18-2) で表すと

$$\begin{aligned} & - \int \int \int \int \tilde{u}_2 \exp(ip_2 \cdot x_2) e\vec{a}(q_2) \exp(-iq_2 \cdot x_2) K_+(2,1) e\vec{a}(q_1) \\ & \times \exp(-iq_1 \cdot x_1) u_1 \exp(-iq_1 \cdot x_1) d\tau_1 d\tau_2 \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \end{aligned} \quad (18-4)$$

となる。 $K_+(2,1)$ に式 (17-2) を用いると、この核は

$$K_+(2,1) = \int \frac{i}{\vec{p} - m} \exp\{-ip \cdot (x_2 - x_1)\} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$

と書くことができる。 τ_1 に依存する因子に着目し、積分のこの部分は、

$$\int \exp(ip \cdot x) \exp(-iq_1 \cdot x_1) \exp(-ip_1 \cdot x_1) d\tau_1 = (2\pi)^4 \delta^4(p - q_1 - p_1) \quad (18-5)$$

と書ける。ここでのデルタ関数 $\delta^4(x)$ は $\delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ の簡略計である。こうすることで、 τ_1 に関する積分は $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{q}_1$ 以外のすべての \vec{p} に対して 0 となる。そこで、 p に関する積分は、式 (18-4) を

$$\begin{aligned} & - \int \int \int \int \tilde{u}_2 \exp(ip_2 \cdot x_2) e\vec{a}(q_2) \exp(-ip_2 \cdot x_2) \exp\{-i(p_1 + q_1) \cdot x_2\} \\ & \times \frac{i}{\vec{p}_1 + \vec{q}_1 - m} e\vec{a}(q_1) u_1 d\tau_2 \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \end{aligned}$$

とすることができる。 τ_2 に関する積分をすると別のデルタ関数 (式 (18-5) と同様) が得られ、

$$\vec{p}_2 - \vec{q}_2 = \vec{p}_1 + \vec{q}_1$$

のときだけ 0 と異なる値を持つ。このことより、 d^4q_2 の積分をすると最終的に

$$(-i^2)i \int \tilde{u}_2 e\vec{a}(q_2) \frac{1}{\vec{p}_1 + \vec{q}_1 - m} e\vec{a}(q_1) u_1 \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \quad (18-6)$$

が得られる。これらの結果は、相互作用の図 (図 18-1 参照) を見れば、直ぐにイメージを描くことができる。

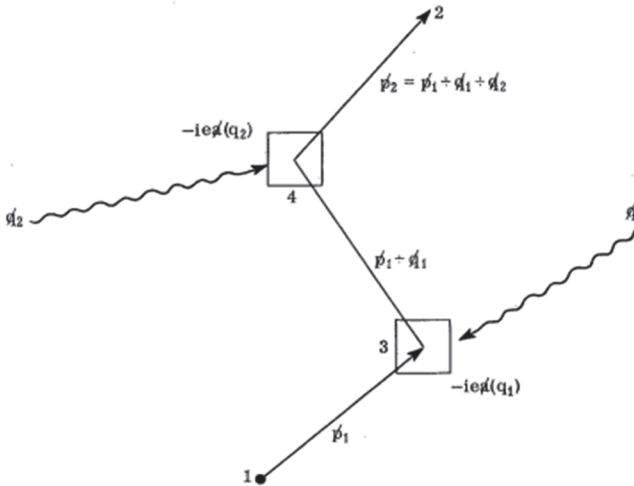


図 18-1

電子は、波動関数 u_1 の状態で領域1に入り、運動量 \vec{p}_1 を持った自由粒子として1から3へ移動する。点3では、運動量 \vec{q}_1 の光子によって散乱される(ポテンシャル $-ie\vec{a}(q_1)$ の作用による)。光子の運動量を吸収したそれは、運動量保存則により運動量 $\vec{p}_1 + \vec{q}_1$ の自由粒子として3から4へ移動する。点4で、運動量 \vec{q}_2 の2番目の光子によって散乱される(ポテンシャル $-ie\vec{a}(q_2)$ の作用により、さらに運動量 \vec{q}_2 が吸収される)。最後に、波動関数 u_2 で運動量 $\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \vec{q}_1 + \vec{q}_2$ を持つ自由粒子として4から2へ移動する。 \vec{p}_1 と \vec{p}_2 が与えられる

と、 \vec{q}_2 は $\vec{q}_2 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 - \vec{q}_1$ で決まるため、積分は q_1 について行えばよいことが図から明白である。エネルギー保存則を満たすには $p_1^2 = m^2$ と $p_2^2 = m^2$ が必要であるが、中間状態は仮想状態であるため、 $(\vec{q}_1 + \vec{q}_2)^2 = m^2$ は必要ではない。演算子 $1/(\vec{p}_1 + \vec{q}_1 - m)$ は $(\vec{p}_1 + \vec{q}_1 + m)/\{(\vec{p}_1 + \vec{q}_1)^2 - m^2\}$ と解することができるため、仮想状態の重要性は保存則を破る度合いに反比例する。

式 (18-3') と式 (18-6) で得られる結果は、行列要素 $M = (\tilde{u}_2 N u_1)$ の計算のための便利な規則を次にまとめておく。

1. 運動量 \vec{p} の仮想状態にある電子は振幅 $i/(\vec{p} - m)$ から N に寄与する。
2. 運動量 q を含むポテンシャルは、振幅 $-ie\vec{a}(q)$ から N に与える。
3. すべての中間状態の運動量 q_i は $d^4q_i/(2\pi)^4$ で総和する。

積分計算、すなわち積分値を求めるには、積分路が特異点を確実に通過することに気をつけること。この場合、積分値の m を $m - i\varepsilon$ に置き換えて、極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ で解を求める。

相対論的な研究においては、摂動級数のいくつかの項のみの計算に必要である。高速の電子（および陽電子）がポテンシャルと一度だけ相互作用すると仮定する（ボルン近似）ことは、多くの場合、十分に有効である。行列要素が求まると、単位時間あたりの遷移確率は

$$P = \frac{2\pi}{\Pi N} |M|^2 \times (\text{終状態の密度})$$

で得ることができる。ここで ΠN は第 16 回講義で定義した規格化係数である。

光と粒子の相互作用の相対論的議論

第 19 回講義

第 2 回講義では、粒子と光の非相対論的相互作用が支配する規則を示した。摂動論による遷移確率の計算には、どのポテンシャルを適応するか規定していた。これらのポテンシャルは、第 18 回講義で説明したように行列要素を計算することにより、相対論的な理論にも適用できる。非相対論で使った光子の吸収ポテンシャルは、

$$A_\mu = \sqrt{\frac{4\pi e^2}{2\omega}} e_\mu \exp(ik \cdot x) \quad (19-1)$$

である。 $K_4 = \omega$, $k \cdot k = 0$, $\hbar = c = 1$ とした。光子の放出には、この式の複素共役を使う。これらのポテンシャルは 1 立方メートルあたり 1 つの光子で規格化されているが、規格化はローレンツ変換不変ではない。電子の波動関数の規格化と同様に行い、今後、式 (19-1) の $(2\omega)^{-1/2}$ 因子を削除して

$$A_\mu = \sqrt{4\pi e^2} e_\mu \exp(ik \cdot x) \quad (19-1')$$

が得られるようにして、光子のポテンシャルを 1 立方メートルあたり 2ω 光子に規格化したい。このため、これらのポテンシャルで計算された行列要素は不変であるが、与えられた座標系で正しい遷移確率を得るには、始状態および終状態の各光子に対して係数 $(2\omega)^{-1}$ を再度乗じる必要がある。これは正規化係数 ΠN の一部となり、始状態および終状態の各電子に対して同様の係数が含まれる。

運動量表現では、偏光 e_μ の光子を吸収 (放出) する振幅は $-i\sqrt{4\pi e^2} \vec{e}$ である。偏光ベクトル e_μ は、伝播ベクトルに直交する単位ベクトルである。したがって、 $e \cdot e = -1$ それに $e \cdot k = 0$ となる。

原子からの放射

単位時間あたりの遷移確率は、

$$\text{遷移確率/秒} = 2\pi |H|^2 \times (\text{終状態の密度})$$

で求められる。ここで、 H は相対論的ハミルトニアン

$$H = \alpha \cdot (-i\nabla - eA) \quad \text{S. R.}$$

に対する始状態と終状態の行列要素である。これは、

$$\langle f | H | i \rangle = \sqrt{4\pi e^2} \int \Psi_f^* \{ \alpha \cdot e \exp(ik \cdot x) \} \Psi_i \, dvol \quad (19-2)$$

で求めることができる。

問題：式 (19-2) は、

$$\frac{1}{2m} \int \Psi_f^* \{ \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{p} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \} \Psi_i \, dvol$$

とすることができる。非相対論的極限を示せ。これは、パウリ方程式から得られた結果と同じとある。

原子内電子による γ 線の散乱

ここで、電子による光子の散乱について相対論的議論を学ぶ。近似として、電子は自由粒子として振る舞うとする（相対論的な扱いが必要となるエネルギーは、一般に、原子が電子を束縛しているエネルギーよりはるかに大きい）。これで、コンプトン効果による断面積を求めるクライン-仁科の式を導くことができる。

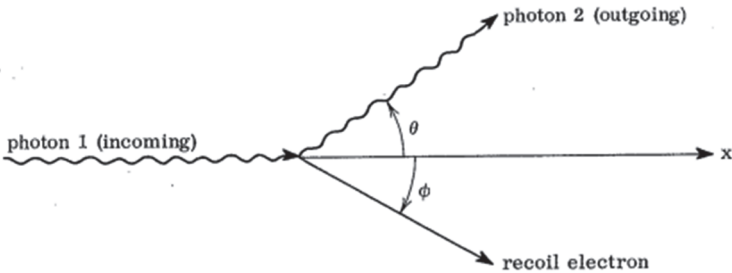


図 19-1

入射光子のポテンシャルを $A_{1\mu} = e_{1\mu} \exp(-iq_1 \cdot x)$ 、散乱光子のポテンシャルを $A_{2\mu} = e_{2\mu} \exp(-iq_2 \cdot x)$ とする。光は伝播方向に対して直角に偏光している（図 19-1 参照）。すなわち、

$$e_1 \cdot q_1 = 0 \quad e_2 \cdot q_2 = 0$$

同様に、

$$q_1 \cdot q_1 = q_1^2 = 0 \quad q_2 \cdot q_2 = q_2^2 = 0 \quad (19-3)$$

である。始状態と終状態の電子の波動関数を、

$$\Psi_1 = u_1 \exp(-ip_1 \cdot x)$$

$$\Psi_2 = u_2 \exp(-ip_2 \cdot x)$$

とする。ここで u_1, u_2 それぞれに p_1, p_2 は次の関係を満たす。

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 u_1 &= m u_1 & \vec{p}_2 u_2 &= m u_2 \\ p_1 \cdot p_1 &= m^2 & p_2 \cdot p_2 &= m^2 \end{aligned} \quad (19-4)$$

エネルギー保存と運動量保存は、4元方程式を使って、次のように書ける。

$$\vec{p}_1 + \vec{q}_1 = \vec{p}_2 + \vec{q}_2 \quad (19-5)$$

電子 1 が静止している座標系を選ぶと、

$$\vec{p}_1 = m \gamma_t \quad (19-6a)$$

$$\vec{p}_2 = E_2 \gamma_t - p_2 \cos \phi \gamma_x - p_2 \sin \phi \gamma_y \quad (19-6b)$$

$$\vec{q}_1 = \omega_1 (\gamma_t - \gamma_x) \quad (19-6c)$$

$$\vec{q}_2 = \omega_2 (\gamma_t - \gamma_x \cos \theta - \gamma_y \sin \theta) \quad (19-6d)$$

と書ける。3番目と4番目の式は、光子の場合、($c=1$ とした単位であるため)

エネルギーと運動量がともに振動数に等しいことから導かれる。運動量は成分ごとに分けられている。入射光子ビームは、2つの型の偏光に分けることができ、これらを A 型と B 型とする。

$$(A) \quad \vec{e}_1 = \gamma_z \quad (B) \quad \vec{e}_1 = \gamma_y$$

A 型は z 方向に電場ベクトルを持ち、B 型は y 方向に電場ベクトルを持つ。同様に、散乱光子ビームも 2種類の偏光に分けることができる。

$$(A') \quad \vec{e}_2 = \gamma_z \quad (B') \quad \vec{e}_2 = \gamma_y \cos \theta - \gamma_x \sin \theta$$

運動量-エネルギー保存則から、反跳電子の角度 ϕ か、散乱光子の散乱角 θ のどちらかを知ることができれば、残りの量を完全に決定する。反跳電子の方向が重要でない場合は、式 (19-5) を \vec{p}_2 について解き、得られた式を 2 乗することで、この運動量を消去することができる。

$$\begin{aligned} \vec{p}_2 &= \vec{p}_1 + \vec{q}_1 - \vec{q}_2 \\ p_2^2 &= m^2 = (\vec{p}_1 + \vec{q}_1 - \vec{q}_2)(\vec{p}_1 + \vec{q}_1 - \vec{q}_2) \\ &= p_1^2 + q_1^2 + q_2^2 + 2p_1 \cdot q_1 - 2p_1 \cdot q_2 - 2q_1 \cdot q_2 \\ &= m^2 + 0 + 0 + 2m\omega_1 - 2m\omega_2 - 2\omega_1\omega_2(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

ここで、この最後の式は式 (19-3)、(19-4)、(19-6a, c, d) を使って、前の式から求めた。これは、

$$m(\omega_1 - \omega_2) = \omega_1 \omega_2 (1 - \cos \theta)$$

あるいは

$$\frac{m}{\omega_2} - \frac{m}{\omega_1} = 1 - \cos \theta \quad (19-7)$$

と書くことができる。この差は、コンプトン効果による波長（振動数）が変化するコンプトン偏移として知られている。

終状態の密度に関して

少し前に説明した方法に従って、終状態密度（区間内での単位エネルギーあたり）を求めてみる。全エネルギーが E で、全運動量が p である 1 つの粒子が 2 つの粒子に分裂した場合の終状態は、

$$\text{状態密度} = \frac{E_1 E_2}{(2\pi)^3} \times \frac{p_1^3 d\Omega}{E_{p_1}^2 - E_1(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_1)} \quad (D-1)$$

と書ける。ここで、 E_1 は粒子 1 のエネルギー、 E_2 は粒子 2 のエネルギー、 \mathbf{p}_2 は粒子 2 の運動量、 $d\Omega$ は立体角である。また、粒子 1 の質量を m_1 、粒子 2 の質量を m_2 とし、保存則は、 $E_1 + E_2 = E$ 、 $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$ となる。

もう一つの有用な式は、粒子 1 の最終エネルギーとその方位角 ϕ_1 (θ_1 , ϕ_1 を代表して) の観点からである。それは、

$$\text{状態密度} = \frac{E_1 E_2}{(2\pi)^3 |p|} dE_1 d\phi_1 \quad (D-2)$$

である。

特別な場合 (a) $m_2 = 0$ ($E_2 = \infty$, $E = \infty$):

$$\text{状態密度} = \frac{E_1 |p_1|}{(2\pi)^3} d\Omega_1 \quad (D-3)$$

(b) 重心系 $\mathbf{p} = 0$:

$$\text{状態密度} = \frac{E_1 E_2 p_1}{(2\pi)^3 (E_1 + E_2)} d\Omega_1 \quad (D-4)$$

3つの粒子の崩壊した場合の終状態は、

$$\text{状態密度} = \frac{E_1 E_2 p_2^3 p_1^2 dp_1}{(2\pi)^6 p_2^2 (E - E_1) - E_2 p_2 \cdot (p - p_1)} d\Omega_1 d\Omega_2 \quad (D-5)$$

となる。

特別な場合 $m_2 = \infty$ のとき、

$$\text{状態密度} = \frac{\omega_2 E_2 \omega_2^3}{(2\pi)^3 \{ (m + \omega_1) \omega_2^2 - \omega_2 (\omega_1 \omega_2 \cos \theta) \}} d\Omega_\omega$$

コンプトン放射

$|M|^2$ の計算。コンプトン関係を示す式 (19-7) を使って θ を消去すると、

$$\text{状態密度} = \frac{E_2 \omega_2^3}{(2\pi)^3 m \omega_1} d\Omega_\omega$$

となる。単位時間あたりの遷移確率は、

$$\text{遷移確率} / \text{秒} = \sigma c = \frac{2\pi |M|^2}{(2\pi)^3 2E_1 2E_2 2\omega_1 2\omega_2} \times \frac{E_2 \omega_2^3}{(2\pi)^3 m \omega_1} d\Omega_\omega$$

となり、また断面積は、

$$\sigma = \frac{\omega_2^2 d\Omega_\omega}{(2\pi)^2 16m^2 \omega_1^2} \times |M|^2$$

となる。行列要素 M の計算の際、散乱の起こり方は 2通りあることに注意する。(R) 入射してきた光子が電子に吸収された後、電子が光子を放出する。(S) 電子が光子を放出した後、入ってきた光子を電子が吸収する。この2つの過程を図 19-2 で示した。

運動量表現では、1つめの過程 R の行列要素 M は、

$$i \left\{ -i\sqrt{4\pi e^2} \right\}^2 \left[\tilde{u}_2 \vec{e}_2 \frac{1}{\vec{p}_1 + \vec{q}_1 - m} \vec{e}_1 u_1 \right]$$

である。

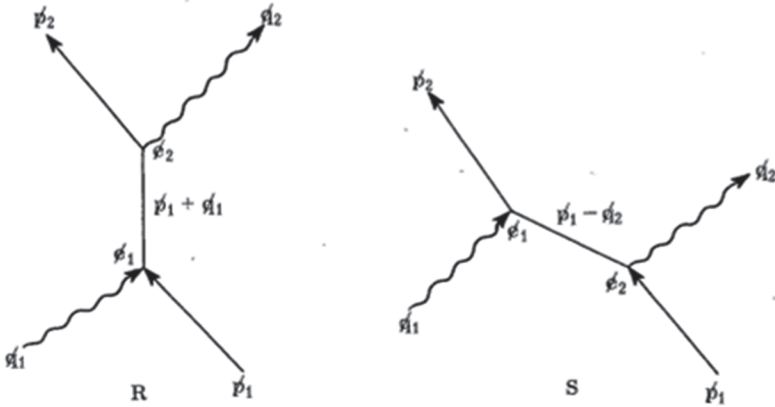


図 19-2

行列要素の因子を右から左へ順に読んでいくと、次のように解釈される。(a) まず電子が振幅 u_1 の状態で入ってくる。(b) 電子は、まずポテンシャル散乱 (つまり光子を吸収する) される。(c) ポテンシャルから運動量 \vec{q}_1 を受け取った電子は、運動量 $\vec{p}_1 + \vec{q}_1$ の自由電子として移動する。(d) 電子は \vec{e}_2 偏光した光子を放出する。(e) 電子は、振幅 \tilde{u}_2 の状態で出ていく。

練習問題：2 つめの過程 S (図 19-2 の S) についての行列要素を書きなさい。行列要素の合計は、1 つめと 2 つめの合計により得られる。これらの行列要素を合理化し、行列要素表 (表 13-1) を用いて $|M|^2$ を算出きなさい。

第 20 回講義

ダイアグラム R における M を計算すると、

$$-i4\pi e^2 \left[\tilde{u}_2 \vec{e}_2 \frac{1}{\vec{p}_1 + \vec{q}_1 - m} \vec{e}_1 u_1 \right] = -i4\pi e^2 (\tilde{u}_2 R u_1)$$

となり、また練習問題の課題であるダイアグラム S の行列要素は、

$$-i4\pi e^2 \left[\tilde{u}_2 \vec{e}_1 \frac{1}{\vec{p}_1 + \vec{q}_2 - m} \vec{e}_2 u_1 \right] = -i4\pi e^2 (\tilde{u}_2 S u_1)$$

となることがわかった。全体としての行列要素はこれら 2 つの和なので、断面積は、

$$\sigma = \frac{e^4}{4m} \times \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 d\Omega_2 |\tilde{u}_2(R+S)u_1|^2$$

となる。次の課題は、 R と S の行列要素を実際に計算することである。まず R を考える。

恒等式

$$\frac{1}{\vec{p}-m} = \frac{\vec{p}+m}{p^2-m^2}$$

を用いて R の分母を計算することにより、この行列は

$$R = \frac{\vec{e}_2(\vec{p}_1 + \vec{q}_1 + m)\vec{e}_1}{(\vec{p}_1 + \vec{q}_1)^2 - m^2} = \frac{\vec{e}_2(\vec{p}_1 + \vec{q}_1 + m)\vec{e}_1}{2m\omega_1}$$

と書けるはずである。分母の $2m\omega_1$ は、次の関係

$$\begin{aligned} (\vec{p}_1 + \vec{q}_1)^2 - m^2 &= p_1^2 + 2p_1 \cdot q_1 + q_1^2 - m^2 \\ p_1^2 &= m^2 \\ q_1^2 &= 0 \\ 2p_1 \cdot q_1 &= 2m\omega_1 \end{aligned}$$

から得られる。この式から、様々なスピンと偏光の組み合わせの行列要素を直ちに計算することができる。しかし、ある予備的な操作により、労力を軽減することができる。恒等式、

$$\vec{a}\vec{b} = 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}\vec{a}$$

を使用すると、

$$\vec{e}_2\vec{p}_1\vec{e}_1 = \vec{e}_2(2p_1 \cdot e_1) - \vec{e}_2\vec{e}_1\vec{p}_1$$

となる。しかし、 p_1 は時間成分のみ、 e_1 は空間成分のみであることから $p_1 \cdot e_1 = 0$ となる。 $\vec{p}_1 u_1 = m u_1$ であることを思い出すと、

$$\tilde{u}_2 \vec{e}_2 \vec{p}_1 \vec{e}_1 u_1 = -\tilde{u}_2 \vec{e}_2 \vec{e}_1 \vec{p}_1 u_1 = -(\tilde{u}_2 \vec{e}_2 \vec{e}_1 u_1) m$$

とこれが R の第 1 項の行列要素であることがわかる。これは R の最終項の行列要素の負でもあるので、 R は等価である

$$R = \frac{\vec{e}_2 \vec{q}_1 \vec{e}_1}{2m\omega_1}$$

と置き換えることができる。行列 S は、まったく同じ手法により、

$$S = \frac{\vec{e}_1 \vec{q}_2 \vec{e}_2}{2m\omega_2}$$

と等しいことを示すことができる。 $\vec{q}_1 = \omega_1(\gamma_t - \gamma_x)$ と $\vec{q}_2 = \omega_2(\gamma_t - \gamma_x \cos \theta - \gamma_y \sin \theta)$ を代入し、因子 $2m$ を置き換えることにより、全体としての行列は、

$$2m(R + S) = \vec{e}_2(\gamma_t - \gamma_x)\vec{e}_1 + \vec{e}_1(\gamma_t - \gamma_x \cos \theta - \gamma_y \sin \theta)\vec{e}_2$$

と書くことができる。さらに有用な形は、 \vec{e}_1 が $q_1(e_1 \cdot q_1 = 0)$ と、 \vec{e}_2 が q_2 と反交換することから、 $\vec{e}_2 \vec{e}_1 = 2e_2 \cdot e_1 - \vec{e}_1 \vec{e}_2$ であることに着目することで得られる。すなわち、

$$\begin{aligned} 2m(R + S) &= -\vec{e}_2 \vec{e}_1(\gamma_t - \gamma_x) - \vec{e}_1 \vec{e}_2(\gamma_t - \gamma_x + \gamma_x - \gamma_x \cos \theta - \gamma_y \sin \theta) \\ &= -2(e_2 \cdot e_1)(\gamma_t - \gamma_x) - \vec{e}_1 \vec{e}_2\{\gamma_x(1 - \cos \theta) - \gamma_y \sin \theta\} \end{aligned}$$

この行列の形を使うと、行列要素を簡単に計算することができる。例として、偏光の場合を考えてみる。この場合、 $\vec{e}_1 = \gamma_z$ 、 $\vec{e}_2 = \gamma_y \cos \theta - \gamma_x \sin \theta$ である。これは第 19 回講義の (A) と (B') に対応するため、(AB') と表記することにする。 $e_2 \cdot e_1 = 0$ を用いることにより、この行列は、

$$2m(R + S) = -\gamma_z(\gamma_y \cos \theta - \gamma_x \sin \theta)\{\gamma_x(1 - \cos \theta) - \gamma_y \sin \theta\}$$

となる。これに γ の反交換関係を利用して拡張すると、

$$\begin{aligned} 2m(R + S) &= -\gamma_z\{\gamma_y \gamma_x \cos \theta(1 - \cos \theta) \\ &\quad + \cos \theta \sin \theta + \sin \theta(1 - \cos \theta) + \gamma_x \gamma_y \sin^2 \theta\} \\ &= \gamma_z(\gamma_x \gamma_y - \gamma_x \gamma_y \cos \theta + \sin \theta) \\ &= -\gamma_x \gamma_y \gamma_z(1 - \cos \theta) - \gamma_z \sin \theta \end{aligned}$$

となる。入射粒子のスピンの向きが上向き、放出粒子のスピンの向きが下向きである場合 ($s_1 = 1, s_2 = -1$)、行列要素

$$\begin{aligned} -2m\sqrt{F_1 F_2}(\vec{u}_2 \gamma_x \gamma_y \gamma_z u_1) &= -iF_2 p_{1+} - iF_1 p_{2+} \\ -2m\sqrt{F_1 F_2}(\vec{u}_2 \gamma_z u_1) &= +p_{1+} F_2 - p_{2+} F_1 \end{aligned}$$

は表 13-1 を参照して求めることができる。しかし、この問題では粒子 1 が静止しているため $p_{1+} = p_{x1} + ip_{y1} = 0$ であることに注意すること。したがって、この場合、偏光 (AB'), スピン $s_1=1, s_2=-1$ の行列要素は、

$$2m\sqrt{F_1F_2}(\tilde{u}_2(R+S)u_1) = -(1 - \cos \theta)iF_1p_{2+} - \sin \theta p_{2+}F_1$$

となる。偏光とスピンの別の組み合わせの結果も同様に得られ、これらを (表 20-1) にした。練習として、この表を検証してみていただきたい。

表 20-1

Polarization	AA'	AB'	BA'	BB'
$\not\epsilon_1$	γ_z	γ_z	γ_y	γ_y
$\not\epsilon_2$	γ_z	$\gamma_y \cos \theta - \gamma_x \sin \theta$	γ_z	$\gamma_y \cos \theta - \gamma_x \sin \theta$
Matrix $2m(R+S)$	$2\tilde{u}_1 - \gamma_x(1 + \cos \theta)$ $-\gamma_y \sin \theta$	$-\gamma_x\gamma_y\gamma_z(1 - \cos \theta)$ $-\gamma_z \sin \theta$	$-\gamma_x\gamma_y\gamma_z(1 - \cos \theta)$ $+\gamma_z \sin \theta$	$2 \cos \theta \gamma_z - \gamma_x(1 + \cos \theta)$ $-\gamma_y \sin \theta$
Matrix elements $2m\sqrt{F_1F_2}(u_2(R+S)u_1)$	$s_1 = +1$	$+2F_2F_1 - (1 + \cos \theta)F_1p_{2-}$	0	0
	$s_2 = +1$	$-i \sin \theta F_1p_{2-}$	0	0
	$s_1 = +1$	0	$-i(1 - \cos \theta) F_1p_{2+}$	$-i(1 - \cos \theta)F_1p_{2+}$
	$s_2 = -1$	0	$-\sin \theta F_1p_{2+}$	$+\sin \theta F_1p_{2+}$

Note: The matrix elements for $\begin{pmatrix} s_1 = -1 \\ s_2 = -1 \end{pmatrix}$ are the complex conjugates of those above for $\begin{pmatrix} s_1 = +1 \\ s_2 = +1 \end{pmatrix}$, and for $\begin{pmatrix} s_1 = -1 \\ s_2 = +1 \end{pmatrix}$ they are the complex conjugates of those for $\begin{pmatrix} s_1 = +1 \\ s_2 = -1 \end{pmatrix}$ above.

偏光の場合、 $|M|^2$ は放出粒子のスピンの状態の行列要素の 2 乗の和で、入射粒子のスピンの状態の平均である。しかし、これは単に適切な偏光の場合に記載されているゼロではない行列要素の 2 乗の大きさとなっていることがわかる。例えば、(AA') の場合では、

$$|M|^2 = |\tilde{u}_2(R+S)u_1|^2 = \frac{1}{4m^2F_1F_2} |2F_2F_1 - (1 + \cos \theta)F_1p_{2-} - i \sin \theta F_1p_{2+}|$$

となる。また、

$$p_{2-} = p_{1-} + q_{1-} - q_{2-} = q_{1-} - q_{2-} = \omega_1 - \omega_2 \cos \theta + i\omega_2 \sin \theta$$

と

$$\frac{m}{\omega_2} - \frac{m}{\omega_1} = 1 - \cos \theta$$

との関係を用いると、様々な場合の行列要素の 2 乗の大きさは、相当な代数計算の後、表 20-2 で示した式となる。

表 20-2

偏光	$ M ^2$
AA'	$\frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{\omega_1 \omega_2} + 4$
AB'	$\frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{\omega_1 \omega_2}$
BA'	$\frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{\omega_1 \omega_2}$
BB'	$\frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{\omega_1 \omega_2} + 4\cos^2 \theta$

これらの 4 つの式いずれもが、明らかに、

$$|M|^2 = \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{\omega_1 \omega_2} + 4(e_1 \cdot e_2)^2$$

から同時に導くことができる。なお、これらの式は円偏光では適切ではない。つまり、例えば、 \vec{e}_1 が $(i\gamma_z + \gamma_y)/\sqrt{2}$ である場合、 \vec{e}_1 の虚部で表される位相のため、適切な干渉を得るためには、すべての計算を行列要素の 2 乗する前に行わなければならないことがわかる。

最後に、入射光子と放出光子の平面偏光を規定した散乱断面積は、

$$\sigma = \frac{e^4}{4m^2} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} d\Omega_{\omega_2} \left\{ \frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - 2 + 4(e_1 \cdot e_2)^2 \right\}$$

となる。これは、偏光に対するクライン-仁科の式である。非偏光の場合は、この断面積をすべての偏光で平均化する必要がある。

なお、図 20-1 のようなダイアグラムの場合では、 $K_+(2,1)$ の運動量表示への変換の一般性の結果として、これまでの導出に含まれていた。実際には、後述する高次の効果を除けば、すべてのダイアグラムの場合でも含むことができる (図 20-2 のような、電子による第 3 の光子の放出と再吸収に相当する)。



図 20-1

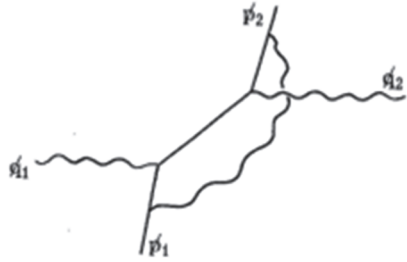


図 20-2

第 21 回講義

クライン-仁科の式の検討

トンプソン極限は、 $\omega_1 \ll m$ である。この場合、電子は反跳でエネルギーをほんの少ししか得ないので、 $\omega_1 \approx \omega_2$ である。これは、

$$m\omega_1 - m\omega_2 = \omega_1\omega_2(1 - \cos\theta) \quad (21-1)$$

の関係からわかる。この極限では、クライン-仁科の式から

$$\sigma = \frac{e^4}{m^2} (e_1 \cdot e_2)^2 d\Omega_\omega \quad (21-2)$$

が得られ、ここがレーリー-トンプソン散乱断面積である。コンプトン散乱における当初の仮定に従うと、 ω は原子の固有値に比べて十分に大きいことに注意すること。

古典的な描像でも同じ結果が得られる。光子の電場 $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_1 \exp(i\omega t)$ の作用のもとで、電子は加速度

$$\mathbf{a} = \frac{e}{m} E_0 \mathbf{e}_1 \exp(i\omega t)$$

を得る。

古典論では、加速された電荷は放射して散乱放射

$$\mathbf{E}_s = -\frac{e}{R} \left(\text{遅延加速度の入射方向の垂直平面成分} \right)$$

を与える。 \mathbf{e}_2 方向に偏光した散乱光は、その方向の加速度成分で定まる。 \mathbf{e}_2 偏光の散乱放射の強度は、(単位立体角あたり、単位入射強度あたりの R^2 単位)

$$I = \frac{e^4}{m^2} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)^2 \quad (21-2')$$

となる。式(21-1)の慣用的に \hbar と c は次のように置き換えることができる(σ は面積または長さの二乗)。

$$e^4 = (e^2)^2 = \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2$$

$$m^2 = \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 = \text{長さの} 2 \text{乗}$$

$$\frac{e^4}{m^2} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = r_0^2 \approx 8 \times 10^{-26} \text{cm}^2$$

偏光の平均

入射ビームあるいは放出ビームが偏光しているかどうかを問うことなく、散乱断面積を求めなくてはならないことはよくある。これは、放射ビームの偏光に対する確率を合計し、入射ビームの平均をとることで得ることができる。したがって、入射ビームがA型に偏光しているとす。A'とB'の2種類の放出ビームの偏光に対する確率(または断面積)は、AA'とBB'と記すことができる。どちらに偏光している光子も散乱確率の合計は(AA' + BB')となる。次に、入射ビームがAまたはBに偏光している確率が等しいとする。その結果、確率は1/2(A型に偏光している場合の確率) + 1/2(B型に偏光している場合の確率)の和として求めることができる。これが偏光していない入射ビームの場合とおなじであるので、

$$\sigma(\text{偏光の平均}) = \frac{1}{2}(AA' + AB') + \frac{1}{2}(BA' + BB')$$

$$= \frac{e^4}{2m^2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 d\Omega_{\omega_2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - \sin^2\theta \right) \quad (21-3)$$

となる。一方、放出ビームの偏光を測定する場合（入射ビームは非偏光であるとした）、その振動数と散乱角への依存性は次の比率

$$\frac{A' \text{型に偏光した確率}}{B' \text{型に偏光した確率}} = \frac{(1/2)(AA' + BA')}{(1/2)(AB' + BB')}$$

で与えられる。前方放射 ($\theta = 0$) は非偏光のままである、ゼロ以外の角度での散乱光にはある程度の偏光が見られる。小さな振動数極限 ($\omega_1 \approx \omega_2$) では、偏光は $\theta = \pi/2$ で完全となる。このように、非偏光ビームが 90° で散乱されると平面偏光になる。

全散乱断面積

式 (21-3) で与えられる断面積（偏光の平均）を立体角

$$d\Omega = 2\pi \times d(\cos\theta) = \frac{2\pi m}{\omega_2^2} d\omega_2$$

で積分すると、任意の角度による散乱の全断面積が得られる。そこで式(21-1)より、

$$\cos\theta = 1 - \frac{m}{\omega_2} + \frac{m}{\omega_1} \quad (21-1')$$

そして変数 ω_2 は、 $\cos\theta$ が -1 から 1 になるに従い、限界値 $m\omega_2/(2\omega_1 + m)$ と ω_1 の間を行き来することになる。式 (21-3) は、

$$d\sigma_T = \frac{e^4}{2m^2} \frac{2\pi}{\omega_1^2} m d\omega_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{2m}{\omega_2} + \frac{2m}{\omega_1} + \frac{m^2}{\omega_1^2} + \frac{m^2}{\omega_2^2} - \frac{2m^2}{\omega_1\omega_2} \right)$$

と書くことができる。ここで、3~7項目は $-\sin^2\theta = \cos^2\theta - 1$ に置き換え、式 (21-1') を使った。これを容易に積分することができ、

$$\sigma_T = \frac{e^4}{m^2} \left\{ \left(\frac{m}{\omega_1} - \frac{2m^2}{\omega_1^2} - \frac{2m^3}{\omega_1^3} \right) \log \left(\frac{2\omega_1}{m} + 1 \right) + \frac{m}{2\omega_1} + \frac{4m^2}{\omega_1^2} - \frac{m^3}{2\omega_1} (2\omega_1 + m)^2 \right\}$$

となる。この高振動数極限 ($\omega_1 \rightarrow \infty$) は、

$$\sigma_T \sim \frac{1}{\omega_1} \log \omega_1 \rightarrow 0$$

である。したがって、コンプトン散乱は、高周波数では無視できる効果であるが、対生成においては重要な効果となる。

対消滅による2光子

量子電気力学的な観点から、コンプトン散乱と非常に類似したもう一つの現象として2光子対消滅をあげることができる。外部ポテンシャルがない状態で対消滅が起こる場合、(放射において)、運動量とエネルギーの保存を維持するために2個の光子が必要である。この相互作用は、図 21-1 として図示することができる。この図は、コンプトン散乱(第20回講義)の図と比較する必要がある。これらの違いは、光子 \vec{q}_1 の向きが逆になっていることと、粒子2が陽電子であるため、 $\vec{p}_2 = -(\text{陽電子の運動量})$ になっていることだけである。

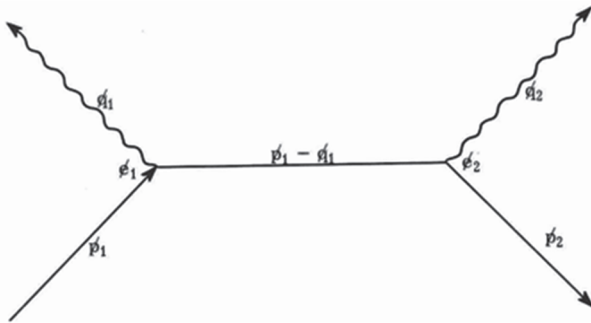


図 21-1

そこで、

$$\vec{p}_1 = (E_- \gamma_t - \mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})$$

$$\vec{p}_2 = -(E_+ \gamma_t - \mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})$$

と記述する。ここで、電子と陽電子のエネルギー E_- と E_+ がともに正である。保存則から、

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_1 - \vec{q}_1 - \vec{q}_2 \quad (21-4)$$

となり (コンプトン散乱の場合と同じ、 \vec{q}_1 の方向が逆である)、この相互作用の行列要素は、

$$M_1 = -i4\pi e^2 \left(\vec{u}_2 \vec{e}_2 \frac{1}{\vec{p}_1 - \vec{q}_1 - m} \vec{e}_1 u_1 \right)$$

となる。

2つめの可能性は、2つの光子を交換したとしても、1つめの可能性と区別することはどのような測定をしてもできない (図 21-2 参照)。すなわち、コンプトン散乱と類似している。ここに着目する。

直ちに、行列要素が、

$$M_2 = -i4\pi e^2 \left(\vec{u}_2 \vec{e}_1 \frac{1}{\vec{p}_1 - \vec{q}_2 - m} \vec{e}_2 u_1 \right)$$

となることがわかる。

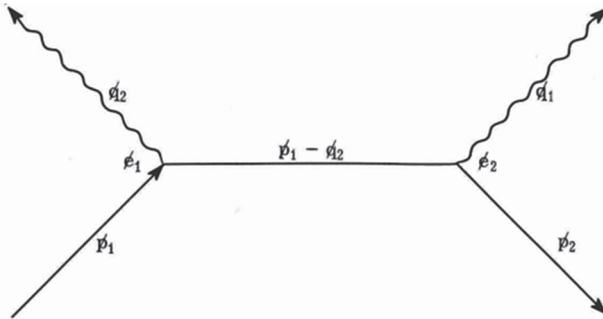


図 21-2

これら 2つの行列要素の和と終状態の密度を使って、電子が静止し、陽電子が運動している系の断面積

$$\sigma \cdot (\text{陽電子の速度}) = \frac{2\pi |M_1 + M_2|^2}{2E_- \cdot 2E_+ \cdot 2\omega_1 \cdot 2\omega_2} \times (\text{状態密度})$$

を得る。終状態の密度は、

$$\frac{\omega_1 \omega_2}{(2\pi)^3} \frac{\omega_1^2 d\Omega_1}{\omega_2 \omega_1 - \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1}$$

である。粒子 2 は陽電子なので、 $\vec{p}_2 = -\vec{p}_+$ となって保存則が成り立ち、式(21-4)から、

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_+ = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$$

が得られる。

これより、

$$m^2 + 2(p_1 \cdot p_+) + m^2 = 0 + 2q_1 \cdot q_2 + 0$$

となる。これは、

$$2m^2 + 2mE_+ = 2\omega_1\omega_2 - 2\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2$$

を導く。陽電子の速度を $|p_+|/E_+$ とすると、断面積は

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2\pi\omega_1^2 d\Omega_1}{2E_- \cdot 2|p_+|4(2\pi)^3 \cdot m(E_+ + m)} \times |M_1 + M_2|^2 \\ &= \frac{\omega_1^2 d\Omega_1 |M_1 + M_2|^2}{64\pi^2 m^2 |p_+|(m + E_+)} \end{aligned}$$

となる。図を比べることにより、 \vec{q}_1 の符号を変えれば、対消滅の行列要素はコンプトン効果の行列要素と同じになることがわかる。断面積において、これは ω_1 の符号を変えることに相当する。そして、クライン-仁科の式から類推することにより、断面積

$$\sigma = \frac{e^4 \omega_1^2 d\Omega_1}{4m^2(m + E_+)|p_+|} \left\{ \frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} + 2 - 4(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_2)^2 \right\}$$

が得られる。

第 22 回講義

静止状態からの陽電子消滅

第 21 回講義で導出した陽電子消滅の式は、陽電子の速度がゼロに近づくと発散する ($\sigma \sim 1/v$; これは、入射粒子の吸収を伴う過程での断面積にもあてはまる。よく知られた $1/v$ 則である)。電子密度 ρ (先ほどの断面積は電子密度が単位体積あたり 1 個の場合だったことを思い出すこと)、 $v_+ \rightarrow 0$ での陽電子の寿命を計算するには、

$$\text{単位時間あたりの遷移確率} = \sigma v_+ \rho$$

に加えて、 $v_+ \rightarrow 0$, $E_+ \rightarrow m$, それに $\omega_1 \rightarrow \omega_2 \rightarrow m$ (共に電子と陽電子がほぼ静止しているとき、運動量とエネルギーは大きさが等しく、逆向きの2つの光子でのみ保存できる) とことを利用する。したがって、

$$\text{単位時間あたりの遷移確率} = \sigma v_+ \rho = \frac{e^4}{2m^2} \rho d\Omega (\sin^2\theta) \quad (22-1)$$

となる。ここで、 θ = 角度は2つの光子の偏光の向き ($\cos\theta = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2$) である。 $\sin^2\theta$ 依存性は、2つの光子の偏光の向きが直角であることを示す。単位時間あたりの光子の向きと偏光に関する遷移確率を求めるには、立体角の和 ($\int d\Omega = 4\pi$) と偏光の平均 ($\sin^2\theta = 1/2$) をとる必要があり、

$$\text{単位時間あたりの全遷移確率} = \frac{1}{\tau} = \frac{\pi e^4}{m^2} \rho$$

(必要に応じて、 c と \hbar を利用する)、ここで r_0 は古典電子半径、 τ は平均寿命である。

問題: (1) 静止している電子と陽電子に対する行列要素を用いて、前述の結果を直接求めたい。一重項状態 (スピンが反平行) のみが2つの光子に崩壊することを示しなさい。三重項状態では、3つの光子に崩壊し、寿命はより長い (次の (2) の問いを参照)。

(2) 陽電子と電子が3個の光子に崩壊するまでに要する平均時間を求めよ (スピンは平行でなければならない)。次のような手順で行うとよい。(a) 崩壊率の式を立てる。(b) M をできるだけ簡単な形で記述する。(c) 行列要素の表を作成する (表 13-1 と同じであるが、 $\vec{p}_1 = m\gamma_t, \vec{p}_2 = -m\gamma_t$ である)。(d) 8つの偏光の場合に分けて M の行列要素を求める。(e) それぞれの場合での崩壊率を求める。(f) 崩壊率を偏光間で合計する。(g) 光子スペクトルを求める。(h) 光子スペクトルと角度で積分して全崩壊率を求める。(i) オールとパウエルの結果 (A. Ore and J.L. Powell, Phys. Rev., **75** (1949) 1696) と比較する。

(3) 行列要素はゲージ変換 $\vec{e}' = \vec{e} + \alpha \vec{q}$ に依存しないことがわかっている。ここで、 α は任意定数であり、 \vec{q} は偏光が \vec{e} または \vec{e}' である光子の運動量であ

る。コンプトン効果の行列要素において、 \vec{q} を $\vec{\epsilon}$ に代入すると $M=0$ になることを示しなさい。

制動放射

電子は、原子核のクーロン場を通過するとき、偏向する。この偏向に伴って加速度が生じ、古典論に従うと電磁波が発生する。量子電気力学では、入射電子が原子核の場にいる間に、ある確率で、電子は別の状態に移りて光子を放出すると考える。

エネルギー保存則と運動量保存則を満たすには、原子核の場との相互作用が必要である。

つまり、電子は真空中を移動している間は、光子を放出し、別の電子状態に移りすることはできない。その過程を図 22-1 に示し、後で、光子が放出する角度を定義する。

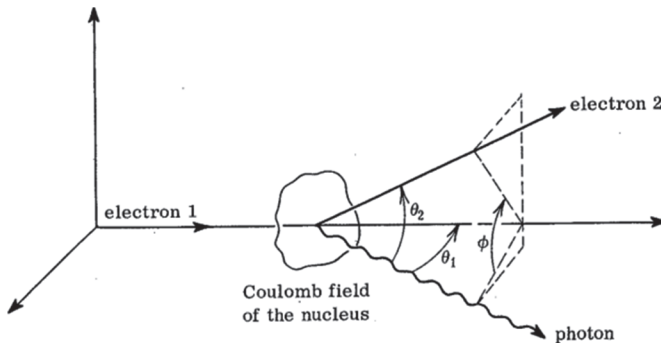


図 22-1

原子核のクーロンポテンシャルは一度だけ作用すると考える（ボルン近似）。この近似の妥当性については、第 16 講義で述べた。制動放射過程には、2つの（区別できない）順序がある。(a) 電子がクーロン場と相互作用した後に光子を放出する場合と、(b) 電子が最初に光子を放出した後にクーロン場と相互作用する場合である。これらの過程を図示したものを図 22-2 に示す。原子核との

相互作用により、電子に運動量 Q が与えられる。エネルギー保存と運動量保存は、

$$\vec{p}_1 + \vec{Q} = \vec{p}_2 + \vec{q} \quad \text{あるいは} \quad \vec{Q} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 + \vec{q}$$

を必要とする。

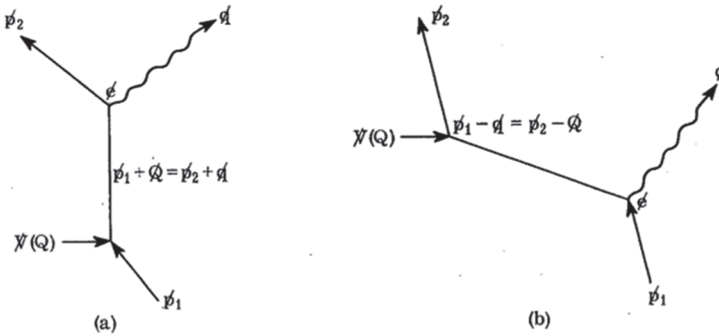


図 22-2

第 18 回講義において、クーロンポテンシャルは時間に依存しないので、そのフーリエ変換は $\delta(Q_4)$ に比例していることが示された。つまり、 $Q_4 = 0$ の遷移しか起こらないか、入射電子、放出電子、光子の間でエネルギーが保存されていなければならない。したがって、 $E_1 = E_2 + \omega$ となる。遷移確率は、

$$\text{単位時間あたりの遷移確率} = \sigma v_1 = \frac{2\pi}{2E_1 2E_2 2\omega} |\mathcal{M}|^2 \times D$$

で与えられる。原子核は（電子に比べ）質量が無限に大きいとすると、

$$D = \frac{E_2 p_2}{(2\pi)^6} d\Omega_2 \omega^2 d\omega d\Omega_\omega$$

となる。光子のスペクトルであること、つまり、光子のエネルギーは（例えばコンプトン効果でそうであったように）決定されていないことに注意すること。

$\mathcal{M} = (\bar{u}_2 M u_1)$ とすると、

$$M = -i\sqrt{4\pi e^2} \left[\bar{e} \frac{1}{\vec{p}_1 + \vec{Q} - m} \vec{V}(Q) + \vec{V}(Q) \frac{1}{\vec{p}_2 - \vec{Q} - m} e \right] \quad (22-3)$$

第 1 項は図 22-2 (a) から、第 2 項は図 22-2 (b) から生じている。第 1 項の因子を説明すると、例えば、最初は状態 u_1 にある電子がクーロンポテンシャルによって運動量 \vec{Q} を追加されることにより散乱し、電子は運動量 $\vec{p}_1 + \vec{Q}$ の自由粒子として偏光 \vec{e} の光子を放出するまで移動すると、右から左に読んでいくことになる。次に、電子は状態 u_2 にあるか？

原子核を固定した座標系でのクーロンポテンシャルは、

$$\vec{V}(Q) = \frac{4\pi Ze^2}{Q^2} \delta(Q_4) \gamma_t = V(Q) \delta(Q_4) \gamma_t$$

(第 18 講義の運動量表現を参照) である (クーロン以外のポテンシャルでは、ポテンシャルの空間依存性のフーリエ変換である $V(Q)$ を適切に使用する)。行列の分母を有理化すると、

$$M = -i\sqrt{4\pi e^2} V(Q) \left[\vec{e} \frac{\vec{p}_1 + \vec{Q} + m}{-2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{Q} - Q^2} \gamma_t + \gamma_t \frac{\vec{p}_1 - \vec{Q} + m}{2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{Q} - Q^2} \vec{e} \right] \quad (22-4)$$

となる。

入射光子は 2 つの方向に偏り、入射電子と放出電子はこれら各々に対して 2 つのスピンの状態を持つ可能性がある。様々な行列要素は、第 20 回講義のクライン-仁科の断面積の導出で行ったのとまったく同様に、表 13-1 を用いて計算することができる。ここで新しいことは何もないので、詳細は省略する。(1) 光子偏光の総和、(2) 放出電子スピン状態の総和、(3) 入射電子スピン状態の平均をとると、次のような微分断面積が得られる。

$$d\sigma = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{Ze^2}{Q^2} \right)^2 e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{p_2}{p_1} \sin \theta_2 d\theta_2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi$$

$$\times \left\{ \frac{p_2^2 \sin^2 \theta_2 (4E_1^2 - Q^2)}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)^2} + \frac{p_1^2 \sin^2 \theta_1 (4E_2^2 - Q^2)}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)^2} \right.$$

$$\left. - \frac{2p_1 p_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi (4E_1 E_2 - Q^2 + 2\omega^2) - 2\omega^2 (p_2^2 \sin^2 \theta_2 + p_1^2 \sin^2 \theta_1)}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \right\} \quad (22-5)$$

光子のエネルギーが小さい場合 (電子の静止質量に比べて小さいが電子の結合エネルギーに比べて大きい)、クーロン弾性散乱断面積の観点から簡単な解

積で近似式を求めることができる。行列 (22-3) にある \vec{Q} を \vec{q} と置き換えると、

$$\begin{aligned} M &= -i\sqrt{4\pi e^2} \left(\vec{e} \frac{1}{\vec{p}_2 + \vec{q} - m} \vec{V}(Q) + \vec{V}(Q) \frac{1}{\vec{p}_1 - \vec{q} - m} \vec{e} \right) \\ &= -i\sqrt{4\pi e^2} \left(\vec{e} \frac{\vec{p}_2 + \vec{q} + m}{+2p_2 \cdot q} \vec{V}(Q) + \vec{V}(Q) \frac{\vec{p}_1 - \vec{q} + m}{-2p_1 \cdot q} \vec{e} \right) \end{aligned}$$

$\vec{e}\vec{p}_2 = -\vec{p}_2\vec{e} + 2e \cdot p_1$ の関係を使うことにより、

$\vec{e}\vec{p}_2 = -\vec{p}_2\vec{e} + 2e \cdot p_1$ の関係を使うことにより、この式に、 $\vec{e}\vec{p}_2 = -\vec{p}_2\vec{e} + 2e \cdot p_1$ と $\vec{p}_1\vec{e} = -\vec{e}\vec{p}_1 + 2e \cdot p_1$ の関係を使い、分子にある \vec{q} は小さいので無視すると、

$$\begin{aligned} M &\approx -i\sqrt{4\pi e^2} V(Q) \left(\frac{-\vec{p}_2\vec{e}\gamma_t + 2e \cdot p_2\gamma_t + m\vec{e}\gamma_t}{2p_2 \cdot q} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-\gamma_t\vec{e}\vec{p}_1 + 2p_1 \cdot e\gamma_t + m\vec{e}\gamma_t}{-2p_1 \cdot q} \right) \delta(Q_4) \\ &= -i\sqrt{4\pi e^2} V(Q) \left(\frac{e \cdot p_1}{q \cdot p_1} - \frac{e \cdot p_2}{q \cdot p_2} \right) \gamma_t \delta(Q_4) \end{aligned}$$

となる。ここで状態 u_2 と u_1 間の M の行列要素を計算し、 $\vec{u}_2\vec{p}_2 = \vec{u}_2m$, $\vec{p}_1u_1 = mu_1$ であることを使った。

そして、光子放出の断面積は、

$$d\sigma = \frac{1}{V} \left\{ \frac{2\pi}{2E_1 2E_2} |V(Q)|^2 \frac{E_2 p_2 d\Omega_2}{(2\pi)^3} \right\} \left\{ \frac{e^2 d\omega \cdot d\Omega_\omega}{\pi\omega} \left(\frac{p_2 \cdot e}{p_2 \cdot \frac{q}{\omega}} - \frac{p_1 \cdot e}{p_1 \cdot \frac{q}{\omega}} \right)^2 \right\}$$

と書くことができる。最初の中括弧は弾性散乱による遷移確率 (第 16 回講義参照) で、2 つめの中括弧は弾性散乱で運動量が p_1 から p_1 になった場合、振動数区間 $d\omega$ と立体角 $d\Omega_\omega$ で光子が放出される確率と解釈できる。

問題： 前述の方法で低エネルギー光子 2 個放出する振幅を計算しなさい。

ヒント： 分子にある q は無視し、分母にある q は無視しない。

答え： 余分な光子に対して、前述の式と同様の別の因子が得られる。

対生成

エネルギーが $2m$ 以上であっても、光子 1 個では、運動量とエネルギーを保存する他の手段がなければ、電子-陽電子対生成が起こらないことが簡単にわかる。2 つの光子が集まって対をつくることもできるが、光子の密度が非常に低い場合、このプロセスは極めて起こりにくい。しかし、光子は原子核のような場の助けを借りて、運動量を得ることができる対をつくることのできる。制動放射と同様に、この現象には 2 つの区別のつかない経路 (過程) がある。(a) 入射光子が対をつくり、その後、電子が原子核の場と相互作用する過程、(b) 入射光子が対をつくり、陽電子が原子核の場と相互作用する過程、の 2 つである。これらの選択枝のダイアグラムを図 22-3 に示す。

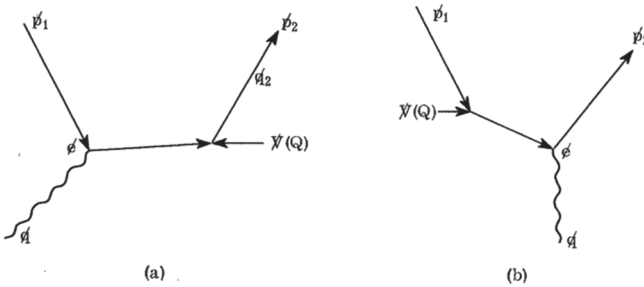


図 22-3

ダイアグラムで使われている矢印は、 \vec{p}_1 が陽電子の運動量、 \vec{p}_2 が電子の運動量を示している。矢印が指す向きに着目すると (経過時間の長さは無視する)、これらのダイアグラムが制動放射過程のダイアグラムとまったく同じであることに注意すること。(a) の場合、 \vec{p}_1 から始まって、粒子はまずクーロンポテンシャルによって散乱され、次に光子によって散乱されるが、(b) の場合、その順序が逆になっている。時間の向きを考慮した場合の対生成と制動放射の違いは、(1) \vec{p}_1 が陽電子状態 (時間を逆行する電子) であること、(2) 光子 \vec{q} が放出ではなく吸収であること、である。その結果、 \vec{p}_1 を $-\vec{p}_+$ 、 \vec{q} を $-\vec{q}$ と置き換えれば、この処理に制動放射の行列要素が使える。このとき、 \vec{p}_+ は陽電子の運動量、 \vec{q} は吸収される光子の運動量となる。終状態の粒子が陽電子と電子であ

ることより、当然ながら、終状態の密度は異なる。したがって、微分断面積は、

$$d\sigma = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{Ze^2}{Q^2} \right)^2 e^2 p_+ p_- \sin\theta_+ d\theta_+ \sin\theta_- d\theta_- \frac{d\phi}{\omega^3} \times \{ \} \quad (22-6)$$

となる。ここで中括弧は制動放射の場合とほぼ同じで、次を適応することで、式 (22-5) と同じとなる。

p_2 を p_- に置き換える θ_2 を $-\theta_-$ に置き換える E_2 を E_- に置き換える
 p_1 を $-p_+$ に置き換える θ_- を $-\theta_+$ に置き換える E_1 を $-E_+$ に置き換える
 ω を $-\omega$ に置き換える

図 22-4 により、角度 (ϕ = 電子-光子面と陽電子-光子面の角度) を定義した。

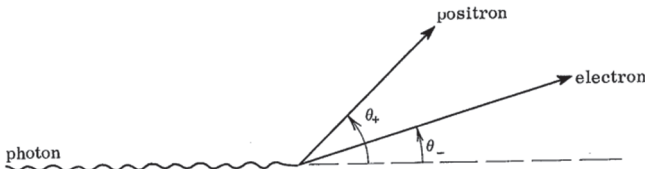


図 22-4

第 23 回講義

スピン状態に関する行列要素の和の方法

これまでの断面積の計算方法を用いると、まず「偏極した」電子、つまり入射と放出の際のスピン状態が明確な電子の断面積に到達することになる。粒子では、入射ビームが「非偏光」であることが一般的で、放出粒子のスピンは観察されない。この場合、「偏極」電子の断面積から、最終的なスピン状態の確率を合計し、その合計を初期スピン状態で平均することで得られる断面積が必要となる。最終的なスピン状態は、干渉せず、初期スピンのどちらの方向にも等しい確率で存在するので、これは正しい処理である。形式的には、

$$\sigma \sim |(\bar{u}_2 M u_1)|^2$$

は、

$$\sigma \sim \frac{1}{2} \sum_{\text{スピン}_1} \sum_{\text{スピン}_2} |(\bar{u}_2 M u_1)|^2 \quad (23-1)$$

とする必要があり、 $\sum_{\text{スピン}_2}$ はエネルギーの 1 つの符号のみ、つまり、4 つの可能な固有状態のうち 2 つだけに関する終状態のスピンを意味する。同様に、 $\sum_{\text{スピン}_1}$ はエネルギーの 1 つの符号に対する初期スピンの総和である。ここでは、これらの和を求める簡単な方法を考えることが目的である。

通常の行列の掛け算規則に従って、

$$\sum_{\text{すべての } u_1} (\tilde{u}_2 A u_1)(\tilde{u}_1 B u_2) = 2m(\tilde{u}_2 A B u_2) \quad (23-2)$$

を行えばよい。ここで、A、B が任意の演算子または行列である。右側の $2m$ 因子は規格化 $\tilde{u}u$ から生じ、和は u_1 が表すすべての固有状態にわたっている。しかし、式 (23-1) で必要な状態 u はすべての状態ではなく、 $\vec{p}_1 u_1 = m u_1$ を満たすものだけである。つまり、演算子 \vec{p}_1 の固有値 $+m$ に属するものである。 $\vec{p}_1^2 = m^2$ 、 \vec{p}_1 も固有値 $-m$ を持つ。つまり、 $\vec{p}_1 u = m u$ の解はあと 2 つあって、式 (23-1) で求める 2 つと合わせた計 4 つである。後者を「負の固有値」状態と呼ぶことにする。

さて、式 (23-2) において、負の固有値状態において B の行列要素がゼロであったとすると、これは $\sum_{\text{スピン}_1}$ と同じ、つまり正の固有値状態を超えただけということになる。そこで、

$$\sum_{\text{すべての } u_1} (\tilde{u}_2 A u_1)(\tilde{u}_1(\vec{p}_1 + m) B u_2) = (\tilde{u}_2 A(\vec{p}_1 + m) B u_2) 2m$$

を考える。しかし、

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(\vec{p}_1 + m) &= 0 && \text{ただし、負の固有状態} \\ &= \tilde{u}_1(2m) && \text{ただし、正の固有状態} \end{aligned}$$

であるため、前の和も

$$\sum_{\text{スピン}_1} (\tilde{u}_2 A u_1) 2m(\tilde{u}_1 B u_2)$$

$2m$ 個の因子を打ち消すことにより、

$$\sum_{\text{スピン}_1} (\tilde{u}_2 A u_1)(\tilde{u}_1 B u_2) = (\tilde{u}_2 A(\vec{p}_1 + m) B u_2)$$

となり、 $(\vec{p}_1 + m)$ は射影演算子であることは明らかである。同様に、

$$\sum_{\text{スピン}_2} (\tilde{u}_2 X u_2) = \sum_{\text{すべての } u_2} \frac{1}{2m} (\tilde{u}_2 (\vec{p}_2 + m) X u_2)$$

が得られる。ここで X は任意の行列である。規格化 $\tilde{u}_2 u_2 = 2m$ での学びから、右辺の和は行列 $(\vec{p}_2 + m)X$ のトレース (対角和) またはシュプールに過ぎないことがわかる。 X と $(\vec{p}_2 + m)$ の順序は (トレースであるため) 重要でないことに注意すること。

最後に、これまでの成果の収集と特殊化することにより、

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{スピン}_1} \sum_{\text{スピン}_2} |(\tilde{u}_2 M u_1)|^2$$

は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\text{スピン}_1} \sum_{\text{スピン}_2} |(\tilde{u}_2 M u_1)|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\text{スピン}_1} \sum_{\text{スピン}_2} (\tilde{u}_2 M u_1) (\tilde{u}_1 \tilde{M} u_2) \\ &= \frac{1}{2} \text{Sp}[(\vec{p}_2 + m)M(\vec{p}_1 + m)\tilde{M}] \quad (23-3) \end{aligned}$$

とできることがわかる。ここで、右辺の項にある記号 (Sp) は、括弧内の行列のシュプール (対角和) を意味する。 \vec{p}_1 , \vec{p}_2 が電子であろうと陽電子であろうと同じである。

よく使われる行列のシュプールの関係を次に記すが、これらを示すことは容易である。

$$\begin{aligned} \text{Sp}[1] &= 4, & \text{Sp}[\gamma_\mu] &= 0, & \text{Sp}[xy] &= \text{Sp}[yx] \\ \text{Sp}[x+y] &= \text{Sp}[x] + \text{Sp}[y] \\ \text{Sp}[\gamma_\nu \gamma_\mu] &= 0 & \mu = \nu \text{ のとき} \\ &= +4 & \mu = \nu = 4 \text{ のとき} \\ &= -4 & \mu = \nu = 1, 2, 3 \text{ のとき} \\ \text{Sp}[\vec{a}\vec{b}] &= \frac{1}{2} \text{Sp}[\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}] = \text{Sp}[a \cdot b] = 4a \cdot b \\ \text{Sp}[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] &= 0 \end{aligned}$$

また、任意の奇数のダガー演算子⁵の積のシュプールは 0 である。

$$\text{Sp}[(\vec{p}_1 + m_1)(\vec{p}_2 - m_2)] = \text{Sp}[\vec{p}_1 \vec{p}_2] + \text{Sp}[m_1 \vec{p}_2 - \vec{p}_1 m_2 - m_1 m_2]$$

$$= 4(p_1 \cdot p_2 - m_1 m_2) \quad (23-4)$$

$$\begin{aligned} & \text{Sp}[(\vec{p}_1 + m_1)(\vec{p}_2 - m_2)(\vec{p}_3 + m_3)(\vec{p}_4 - m_4)] \\ &= 4(p_1 \cdot p_2 - m_1 m_2)(p_3 \cdot p_4 - m_3 m_4) - 4(p_1 \cdot p_3 - m_1 m_3)(p_2 \cdot p_4 - m_2 m_4) \\ &+ 4(p_1 \cdot p_4 - m_1 m_4)(p_2 \cdot p_3 - m_2 m_3) \end{aligned} \quad (23-5)$$

例として、この手法で、クーロン散乱の場合を「論じて」みる。偏極した電子の断面積は、

$$\sigma = \frac{Z^2 e^4}{Q^4} |\tilde{u}_2 \gamma_t u_1|^2$$

であることは少し前に学んだ。したがって、 $\tilde{\gamma}_t = \gamma_t$ があるので、非偏極電子の断面積は、式 (23-3) により、

$$\sigma_{unpot} = \frac{1}{2} \frac{Z^2 e^4}{Q^4} \text{Sp}[(\vec{p}_2 + m) \gamma_t (\vec{p}_1 + m) \gamma_t]$$

となる。シュプールの評価は $m_2 = m_4 = 0$ とした式 (23-5) それと $\vec{p}_2 = \vec{p}_4 = \gamma_t$ を用いることですぐに行える。別の方法としては、 $\gamma_t \vec{p}_1 = 2E_1 - \vec{p}_1 \gamma_t$ から、

$$(\vec{p}_2 + m) \gamma_t (\vec{p}_1 + m) \gamma_t = (\vec{p}_2 + m)(2E_1 \gamma_t - \vec{p}_1 + m)$$

であることがわかる。この行列のシュプールは、前述のいくつかの式を使って、

$$-4p_1 \cdot p_2 + 8E_1 E_1 + 4m^2$$

となることがわかる。しかし $p_1 \cdot p_2 = E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p^2 \cos \theta$ 、それに $E_1 = E_2$ であるので、この式は、

$$4E^2 + 4m^2 + 4p^2 \cos \theta$$

と書ける。また $m^2 = E^2 - p^2$ であるので、最終的に断面積は、

$$\begin{aligned} \sigma_{unpot} &= \frac{1}{2} \frac{Z^2 e^4}{Q^4} [8E^2 + 4p^2(\cos \theta - 1)] \\ &= \frac{8Z^2 e^4}{Q^4} E^2 \left[1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned}$$

となる。ここで、 $v^2 = p^2/E^2$ である。これは、以前に他の方法で得られたものと同じ断面積である。

原子内のクーロン場の遮蔽効果

ペア生成過程と制動放射過程の断面積には、因子 $\{V(Q)\}^2$ が含まれている。 $V(Q)$ は、運動量表現によるポテンシャルである。つまり、クーロンポテンシャルの場合

$$V(Q) = \int V(R) \exp(-i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}) d^3R$$

で、 \mathbf{Q} は原子核に伝わる運動量、または $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}$ である。

$V(Q)$ は、 \mathbf{Q} が小さくなると大きくなることは明らかである。 \mathbf{Q} の最小値は、3つの運動量がすべて同じ向きになったときに起こる (図 23-1)。

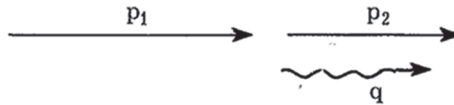


図 23-1

非常に高いエネルギー $E \gg m$ では、

$$E - p \approx \frac{m^2}{2E}$$

となり、この場合、

$$Q_{min} = \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \approx \frac{m^2 q}{2E_1 E_2}$$

となる。これは、 $E_1 \rightarrow \infty$ なら $Q_{min} \rightarrow 0$ となる。このことから、対生成あるいは制動放射の断面積は、エネルギーが高くなってはならないか、よくわかる。

$V(Q)$ の積分表示から、積分に主に寄与する領域は $R \sim 1/Q$ であることがわかる。つまり、 \mathbf{Q} が小さくなると、 R の重要な範囲が広がる。このようにして、クーロン場の遮蔽が有効になる。想定される過程での $1/Q_{min}$ の値は、前述の式から推定することができる。原子半径はおおよそ $a_0 Z^{-1/3}$ で与えられる (a_0 はボーア半径である)。したがって、

$$R_{eff} = \frac{1}{Q_{min}} > a_0 Z^{-\frac{1}{3}}$$

また別の表現では

$$\frac{E_1 E_2}{q} > \frac{137}{2} m Z^{-\frac{1}{3}}$$

であれば遮蔽効果が重要となり、不等式が逆向きであれば重要ではない。この推定値から遮蔽が重要であると思われる場合は、遮蔽されたクーロンポテンシャルを使用する必要がある。この結果として、

$$V(Q) = \frac{4\pi e^2}{Q^2} \{Z - F(Q)\}$$

となる。ここで、 $F(Q)$ は

$$F(Q) = \int n(R) \exp(-i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}) d^3R$$

与えられる原子構造因子、 $n(R)$ は R の関数としての電子密度である。

第 24 回講義

問題：制動放射の議論において、低エネルギー光子の放出断面積は、近似できて、

$$\sigma = \sigma_0 e^2 4\pi \frac{d\omega}{\pi\omega} \left\{ \frac{p_2 \cdot e}{p_2} \cdot \frac{q}{\omega} - \frac{p_1 \cdot e}{p_1} \cdot \frac{q}{\omega} \right\}^2 \quad (24-1)$$

となる。ここで σ_0 は散乱断面積（放出は無視した）である。次に 3 つめとして、弱い光子が放出される高エネルギーコンプトン散乱を考える。図 24-1 に 3 つのダイアグラムを示す。

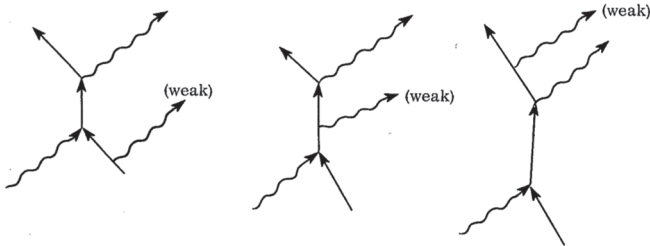


図 24-1

この効果の断面積は、 σ_0 をクライン-仁科の式に置き換えて、式 (24-1) で与えられることを示しなさい。(q は小さいと仮定することを忘れずに)。

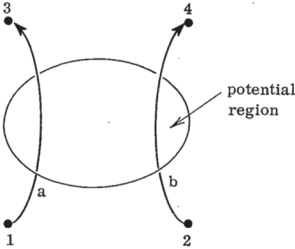


図 24-2

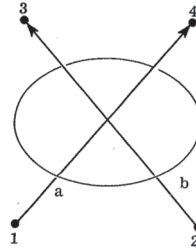


図 24-3

(次号に続く)

注

- 1 Quantum Electrodynamics, A Lecture Note and Reprint Volume ©1961 by W.A. Benjamin, Inc.
- 2 ここでは、Word の都合で \vec{a} としたが、ファインマンはダガー (ファインマン・ダガー) を使っている。
- 3 $p_1 = \frac{mv_1}{\sqrt{1-v_1^2}} \rightarrow p_1^2 = \frac{m^2v_1^2}{1-v_1^2} \rightarrow p_1^2 = (m^2 + p_1^2)v_1^2 = E_1^2v_1^2$, すなわち, $v_1 = p_1/E_1$ である。
- 4 次の関係式を用いた。

$$\begin{aligned}
 (\vec{p}_1 + \vec{Q} - m)(\vec{p}_1 + \vec{Q} + m) &= p_1^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{Q} + Q^2 - m^2 = 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{Q} + Q^2 \\
 &= -2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{Q} + Q^2 \\
 &= -2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{Q} - Q^2 \quad Q_4 = 0
 \end{aligned}$$

- 5 ここでは、Word の都合で \vec{a} とした。